Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 12
09.01.2014

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*
Wir wünschen allen Studenten frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

12.1ε Rückzug vertauscht mit Dachprodukt. Es sei $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ω eine p-Form und χ eine q-Form auf V, $p, q \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\chi).$$

12.2 Volumen eines Kugelschalensektors. Berechnen Sie für $0 < a < b$ und $c > 0$ das Volumen $\lambda_3(S)$ des Kugelschalensektors

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z > 0,\ a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < b^2,\ z^2 < c^2(x^2 + y^2)\}$$

Versuchen Sie sich S anschaulich vorzustellen.
Hinweis: Transformieren Sie in Kugelkoordinaten.

12.3 Stereographische Projektion und hyperbolische Ebene.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

die (inverse) stereographische Projektion. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in S^2$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit der Sphäre S^2 ist.
Berechnen Sie f^*g für die euklidische Metrik

$$g = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 + dy_3 \otimes dy_3.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$f^*g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ gilt. Man sagt hierzu: f ist *konform* oder auch *winkeltreu*.

(b) **Hyperbolische Variante:** Gegeben sei die indefinite symmetrische Bilinearform

$$h = dy_1 \otimes dy_1 + dy_2 \otimes dy_2 - dy_3 \otimes dy_3$$

und das zweischalige Hyperboloid

$$H = \{y \in \mathbb{R}^3 |\ h(y,y) = -1\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 |\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = -1\}$$

sowie die (inverse) hyperbolische stereographische Projektion $f : D \to H$,

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

wobei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ die Einheitskreisscheibe bezeichnet. Überzeugen Sie sich davon, dass $f(x_1, x_2)$ der zweite Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, -1) \in H$ und $(x_1, x_2, 0)$ mit dem Hyperboloid H ist.

Berechnen Sie $g := f^*h$ und überzeugen Sie sich davon, dass

$$g = \alpha \cdot (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$$

für ein $\alpha : D \to \mathbb{R}^+$ gilt. Insbesondere ist g positiv definit, also eine Riemannsche Metrik auf der Einheitskreisscheibe.

g wird die *Poincaré-Metrik* auf D genannt. Die Einheitskreisscheibe D, versehen mit dieser Riemannschen Metrik, wird *Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene* genannt.

12.4 Zusammensetzen eines Maßes aus Stücken. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Mengen $V_i \in \mathcal{A}$, die eine abzählbare Überdeckung $(V_i)_{i \in J}$ von M umfaßt: $J \subseteq I$ abzählbar, $\bigcup_{i \in J} V_j = M$. Für jedes $i \in I$ sei μ_i ein Maß auf $(V_i, \mathcal{A}_i)$, wobei $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A} |\ A \subseteq V_i\}$. Weiter gelte $\mu_i(A) = \mu_j(A)$ für alle $i, j \in I$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq V_i \cap V_j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mu(A) = \mu_i(A)$ für alle $i \in I$ und $A \in \mathcal{A}_i$ gilt.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 20.01.2014, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 12

T12.1 (a) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) = g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die Polarkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

$$g^*(dx \wedge dy) = r\,dr \wedge d\varphi.$$

Wir nennen $r\,dr \wedge d\varphi$ das "*Flächenelement* in Polarkoordinaten".

(b) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ die Kugelkoordinatenabbildung. Zeigen Sie:

$$g^*(dx \wedge dy \wedge dz) = r^2 \sin\vartheta\, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Wir nennen dies das "*Volumenelement* in Kugelkoordinaten".

T12.2 Zeigen Sie: Jede offene Überdeckung einer beliebigen Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.
Hinweis: Verwenden Sie, dass es nur abzählbar viele Quader in $\mathbb{R}^n$ mit rationalen Eckpunkten gibt.

T12.3 (Oberflächenform aus Volumenform durch Einsetzen von Normalenvektoren) Es sei M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, also 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit. Weiter sei $\phi : U \to M$ eine surjektive Parametrisierung von M, $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Schließlich sei $N : M \to \mathbb{R}^n$ ein normiertes Normalenvektorfeld auf M, d.h. $N(x) \perp T_xM$ (Orthogonalität bezüglich des Standardskalarprodukts gemeint) und $\|N(x)\|_2 = 1$ für alle $x \in M$. Es gelte $\det(N(x), D\phi(x)) > 0$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie:

$$\omega^M(A) = \int_{\phi^{-1}[A]} \phi^*(i_V \lambda_N),$$

wobei $\phi^*(i_V\lambda_n)_x = d\phi_x^*(i_{V(x)}\lambda_n)$ für $x \in U$.

T12.4 a) Es sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}^+$ eine glatte Abbildung. Der Graph von f werde im Raum um die x-Achse rotiert:

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y^2 + z^2 = f(x)^2,\ a < x < b\}.$$

Zeigen Sie, dass M den Flächeninhalt

$$A = \pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie Parametrisierungen der Gestalt
$k(x,t) = (x, f(x)\cos t, f(x)\sin t)$.

b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationsellipsoids

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 + b^{-2}z^2 = 1\}$$

für gegebene $a, b > 0$. Was erhält man für festes $b > 0$ in den Limiten $a \to 0$ bzw. $a \to b$?
Hinweis: Arbeiten Sie dabei *entweder* mit der Formel aus a) *oder* mit geeignet skalierten Kugelkoordinaten *oder* mit einer geeignet skalierten stereographischen Projektion.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$*$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.