Übungen zur Analysis 3
Lösung

11.1 Rechteck∗Rechteck=Dreieck.

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(1 - |x/2|)_+ \tag{1}$$

Veranschaulichen Sie sich diese Formel graphisch.

(b) Beweisen Sie

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}(1 - |x/2|)_+ \, dx = \begin{cases} \frac{\sin^2 k}{k^2} & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

(i) direkt mit Techniken aus der Analysis 1,

(ii) mit der Faltungsformel (1) und Lemma 2.66.

Lösung

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2}(z) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]}(x) 1_{[-1,1]}(z-x) \lambda_1(dx) \\ &= \frac{1}{4} \int_{[-1,1]} 1_{[-1,1]}(z-x) \lambda_1(dx) \\ &= \frac{1}{4} \int_{[-1+z,1+z]} 1_{[-1,1]}(-x) \lambda_1(dx) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}(2 - |z|) & \text{für } |z| < 2 \\ 0 & \text{für } |z| \geq 2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}(1 - |z/2|)_+. \end{aligned}$$

(b) Der Fall $k = 0$ ist klar.

(i) Für $k \neq 0$ erhalten wir mit Methoden der Analysis I

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}(1 - \frac{|x|}{2})_+ dx &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} e^{ikx}(1 - \frac{|x|}{2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (\cos(kx) + i \sin(kx))(1 - \frac{|x|}{2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \cos(kx)(1 - \frac{|x|}{2}) dx, \end{aligned}$$

weil sin eine ungerade Funktion ist

$$= \int_0^2 \cos(kx) - \cos(kx)\frac{|x|}{2})dx,$$

da cos gerade ist

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{2}\cos(kx)dx \\
&= \frac{1}{k}\sin(2k) - \frac{1}{2}\left(\left[x\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{k}\sin(kx)dx\right)
\end{aligned}$$

mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{2k}\left[\frac{1}{k}(-\cos(kx)\right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{2k^2}(1 - 2\sin^2 k - 1) \\
&= \frac{1}{k^2}\sin^2 k.
\end{aligned}$$

(ii) Unter Verwendung von (1) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}(1 - \frac{|x|}{2})_+ dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2}(x)dx \\
&= \widehat{\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2}}(k) \\
&\overset{\text{Lemma 2.66}}{=} \widehat{\frac{1_{[-1,1]}}{2}}(k)\widehat{\frac{1_{[-1,1]}}{2}}(k).
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\widehat{\frac{1_{[-1,1]}}{2}}(k)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{1_{[-1,1]}}{2}}(k) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}1_{[-1,1]}(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^{ikx}dx \\
&= \frac{1}{2ik}[e^{ikx}]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2ik}(e^{ik} - e^{-ik}) \\
&= \frac{1}{2ik}(\cos(k) + i\sin(k) - \cos(-k) - i\sin(-k)) \\
&= \frac{1}{2ik}(0 + 2i\sin(k)) \\
&= \frac{1}{k}\sin(k).
\end{aligned}$$

Und die Behauptung folgt.

11.2ε Rechenregeln für die Faltung. Es seien μ, ν, κ drei endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Zeigen Sie:

(a) *Kommutativgesetz:* $\mu * \nu = \nu * \mu$,

(b) *Assoziativgesetz:* $\mu * (\nu * \kappa) = (\mu * \nu) * \kappa$,

(c) *Distributivgesetz:* $\mu * (\nu + \kappa) = \mu * \nu + \mu * \kappa$.

Lösung

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $B := \{a, b \in \mathbb{R}^n : a + b \in A\}$ das Urbild unter $+$.

(a) Integration bzgl. des Bildmaßes, Kommutativität von $+$ und Aufgabe **8.3ε** liefern $\mu*\nu(A) = +[\mu\otimes\nu](A) = \int_A d+[\mu\otimes\nu] = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} 1_A(a+b)\, d\mu\otimes\nu = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} 1_A(b+a)\, d\nu\otimes\mu = \nu * \mu(A)$.

(b) Das ist Aufgabe **5.5ε**.

(c) Man erinnere sich an Aufgabe **T6.4**. Mit der Lineariät des Integrals folgt $\mu * (\nu + \kappa)(A) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ \mu \otimes (\nu + \kappa)(d(a, b)) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ (\nu + \kappa)(db)\ \mu(da) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ \nu(db) + \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ \kappa(db)\ \mu(da) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ \nu(db)\ \mu(da) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(a + b)\ \kappa(db)\ \mu(da) = (\mu * \nu + \mu*)\kappa(A)$.

11.3 Die Cauchyverteilung. Die Cauchyverteilung Cau_a zum Parameter $a > 0$ ist das durch

$$\mathrm{Cau}_a(dx) = \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}}_{=:\mathrm{Cau}(y)}\ dx$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a)ε **(Skalierungseigenschaft)** Für $t > 0$ sei $m_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m_t(x) = tx$ die Multiplikation mit t. Zeigen Sie für $a, t > 0$:

$$m_t[\mathrm{Cau}_a] = \mathrm{Cau}_{ta}$$

(b)∗ **(Faltungseigenschaft)** Beweisen Sie für $a, b > 0$:

$$\mathrm{Cau}_a * \mathrm{Cau}_b = \mathrm{Cau}_{a+b}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Lösung

(a) Es gilt mit $x \mapsto \frac{x}{t}$

$$\int_A dm_t[\mathrm{Cau}_a] = \int_{\mathbb{R}} 1_A(tx) \frac{a}{a^2 + x^2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + x^2/t^2}\ d(x/t) = \int_A \mathrm{Cau}_{ta}(dx).$$

(b) Wir nutzen die Paritalbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi \operatorname{Cau}_a(y) \operatorname{Cau}_b(x-y)}{\operatorname{Cau}_{a+b}(x)} \\
&= \frac{ab(a^2+2ab+b^2+x^2)}{\pi(a^2+y^2)(b^2+x^2-2xy+y^2)(a+b)} \\
&= \frac{ab(a^2+2ab+b^2+x^2)(x^2+(a-b)^2)}{\pi(a^2+y^2)(b^2+x^2-2xy+y^2)(a+b)(x^2+(a-b)^2)} \\
&= \frac{ba\,(x^2+b^2-a^2+2\,xy)}{(a+b)\,(a^2+y^2)\left(x^2+(a-b)^2\right)} + \frac{ab\,(x^2+a^2-b^2+2\,x\,(x-y))}{(a+b)\left(b^2+(x-y)^2\right)\left(x^2+(a-b)^2\right)} \\
&= \frac{ba\,(x^2+b^2-a^2+2\,xy)}{(a+b)\,(a^2+y^2)\left(x^2+(a-b)^2\right)} + \frac{ab\,(x^2+a^2-b^2+2\,x\,(x-y))}{(a+b)\left(b^2+(x-y)^2\right)\left(x^2+(a-b)^2\right)} \\
&= \frac{b\pi \operatorname{Cau}_a(y)\,(x^2+b^2-a^2+2\,xy)}{(a+b)\left(x^2+(a-b)^2\right)} + \frac{a\pi \operatorname{Cau}_b(x-y)\,(x^2+a^2-b^2+2\,x\,(x-y))}{(a+b)\left(x^2+(a-b)^2\right)}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $y \operatorname{Cau}_a(y)$ ungerade in y ist, verschwindet ihr Integral über $\mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Cau}_a(y) \operatorname{Cau}_b(x-y)}{\operatorname{Cau}_{a+b}(x)}\, dy \\
&= \frac{b}{a+b}\frac{x^2+b^2-a^2}{x^2+(a-b)^2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Cau}_a(y)(dy) + \frac{a}{a+b}\frac{x^2+a^2-b^2}{x^2+(a-b)^2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Cau}_b(x-y)(dy) \\
&= \frac{b}{a+b}\frac{x^2+b^2-a^2}{x^2+(a-b)^2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Cau}_a(y)(dy) + \frac{a}{a+b}\frac{x^2+a^2-b^2}{x^2+(a-b)^2}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Cau}_b(y)(dy) \\
&= \frac{b}{a+b}\frac{x^2+b^2-a^2}{x^2+(a-b)^2} + \frac{a}{a+b}\frac{x^2+a^2-b^2}{x^2+(a-b)^2} = 1,
\end{aligned}$$

wobei wir die folgende Normierung verwendet haben

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Cau}_a(dy) = \frac{\arctan(x/a)]_{-\infty}^{\infty}}{\pi} = 1.$$

10.4 Rechenregeln für die Einsetzoperation. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p, q \in \mathbb{N}$.

(a)ε Zeigen Sie, dass die Einsetzoperation

$$i_\cdot : V \times \bigwedge^p V' \to \bigwedge^{p-1} V', \quad (v, \omega) \mapsto i_v\omega$$

bilinear ist.

(b)ε Zeigen Sie

$$i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$$

für alle $v, w \in V$ und $\omega \in \bigwedge^p V'$ mit $p \geq 2$.

(c) **(Antikommutative Produktregel)** Zeigen Sie für $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$:

$$i_v(\omega \wedge \chi) = (i_v\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (i_v\chi)$$

Lösung

(a) Seien $u_1, \ldots, u_{p-1} \in V$.

Linearität im ersten Eintrag:

$$\begin{aligned} i(v+w,\omega)(u_1,\ldots,u_{p-1}) &= \omega(v+w,u_1,\ldots,u_{p-1}) = \\ &= \omega(v,u_1,\ldots,u_{p-1}) + \omega(w,u_1,\ldots,u_{p-1}) \\ &= i_v\omega(u_1,\ldots,u_{p-1}) + i_w\omega(u_1,\ldots,u_{p-1}). \end{aligned}$$

Linearität im zweiten Eintrag:

$$\begin{aligned} i(v,\omega+\eta)(u_1,\ldots,u_{p-1}) &= (\omega+\eta)(v,u_1,\ldots,u_{p-1}) = \\ &= \omega(v,u_1,\ldots,u_{p-1}) + \eta(v,u_1,\ldots,u_{p-1}) \\ &= i_v\omega(u_1,\ldots,u_{p-1}) + i_v\eta(u_1,\ldots,u_{p-1}). \end{aligned}$$

(b) Seien $u_1, \ldots, u_{p-2} \in V$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} i_v i_w \omega(u_1,\ldots,u_{p-2}) = i_v\omega(w,u_1,\ldots,u_{p-2}) \\ &= \omega(v,w,u_1,\ldots,u_{p-2}) \\ &= -\omega(w,v,u_1,\ldots,u_{p-2}) \\ &= -i_w i_v \omega(u_1,\ldots,u_{p-2}). \end{aligned}$$

(c) Wir beweisen die Aussage per Induktion nach dem Grad von ω (d.h. nach p). Wir machen zuerst den Induktionsschritt: Angenommen die Formel stimmt für alle $p' \leq p \in \mathbb{N}$ und für alle $q \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass sie dann auch für $p+1$ stimmt. Dazu sei $\omega \in \bigwedge^{p+1} V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$. Nach Lemma 2.74 existieren dann alternierende Multilinearformen ω_i vom Grad p und α_i von Grad 1, sodass $\omega = \sum_i \omega_i \wedge \alpha_i$. Dann gilt

$$i_v(\omega \wedge \chi) = i_v(\sum_i \omega_i \wedge \alpha_i) \overset{\text{wg. (a)}}{=} \sum_i i_v(\omega_i \wedge \alpha_i)$$

und

$$(i_v\omega) \wedge \chi + (-1)^{p+1}\omega \wedge (i_v\chi) \overset{\text{wg. (a)}}{=} \sum_i \left(i_v(\omega_i \wedge \alpha_i) \wedge \chi + (-1)^p \omega_i \wedge (i_v\alpha_i)\right).$$

Es genügt also, den Induktionsschritt für eine alternierende Multilinearform vom Grad $p+1$, die von der Form $\omega \wedge \alpha$ mit $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\alpha \in \bigwedge^1 V'$ ist, zu zeigen.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} i_v((\omega\wedge\alpha)\wedge\chi) &= i_v(\omega\wedge(\alpha\wedge\chi)) \\ &\overset{\text{Ind.annahme}}{=} i_v\omega \wedge (\alpha\wedge\chi) + (-1)^p\omega\wedge i_v(\alpha\wedge\chi) \\ &\overset{\text{Ind.annahme}}{=} i_v\omega \wedge (\alpha\wedge\chi) + (-1)^p\left(\omega\wedge i_v\alpha\wedge\chi + \omega\wedge\alpha\wedge(-1)^1 i_v\chi\right) \\ &= (i_v\omega\wedge\alpha + (-1)^p\omega\wedge i_v\alpha)\wedge\chi + (-1)^{p+1}(\omega\wedge\alpha)\wedge i_v\chi \\ &\overset{\text{Ind. annahme}}{=} i_v(\omega\wedge\alpha)\wedge\chi + (-1)^{p+1}(\omega\wedge\alpha)\wedge i_v\chi, \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt bewiesen ist.

Induktionsanfang: Sei nun $\omega \in \bigwedge^1 V'$ und $v_2, \dots v_{q+1} \in V$. Setze $v_1 := v$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
i_v(\omega \wedge \chi)(v_2, \dots, v_{q+1}) &= \omega \wedge \chi(v_1, v_2, \dots, v_{q+1}) \\
&= \sum_{\sigma \in S(1,q)} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}) \chi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S(1,q) \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}) \chi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)}) + \\
&\quad + \sum_{\substack{\sigma \in S(1,q) \\ \sigma(1)\neq 1}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}) \chi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)}) \\
&= \omega(v_1)\chi(v_2, \dots, v_{q+1}) + \sum_{j=2}^{q+1} \sum_{\substack{\sigma \in S(1,q) \\ \sigma(1)=j}} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}) \chi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q+1)})
\end{aligned}$$

Jede Permutation $\sigma \in S(1,q)$ ist eindeutig durch $\sigma(1)$ festgelegt und hat Signum $(-1)^{\sigma(1)+1}$. Die Doppelsumme reduziert sich also zu:

$$\begin{aligned}
&= \omega(v_1)\chi(v_2, \dots, v_{q+1}) + \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j+1} \omega(v_j) \chi(v_2, \dots, v_1, \dots, v_{q+1}) \\
&= \omega(v_1)\chi(v_2, \dots, v_{q+1}) + \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j+1} (-1)^j \omega(v_j) \chi(v_1, v_2 \dots v_{q+1}) \\
&= \omega(v_1)\chi(v_2, \dots, v_{q+1}) - \sum_{j=2}^{q+1} \omega(v_j) \chi(v_1, v_2 \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{q+1}).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge i_v \chi)(v_2, \dots, v_{q+1}) &= \sum_{\sigma \in S(1,q-1)} \operatorname{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(2)}) \chi(v_1, v_{\sigma(3)}, \dots, v_{\sigma(q+1)}) \\
&= \sum_{j=2}^{q+1} (-1)^{j+1} \omega(v_j) \chi(v_1, v_3, \dots, v_2, \dots, v_{q+1}) \\
&= \sum_{j=2}^{q+1} \omega(v_j) \chi(v_1, v_2, v_3, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{q+1}).
\end{aligned}$$

Die beiden Rechnungen zusammen ergeben genau den Induktionsanfang.