Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, die bevorzugt korrigiert werden sollen.
Wir wünschen allen Studenten frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!

11.1 Rechteck*Rechteck=Dreieck.

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{1_{[-1,1]}}{2} * \frac{1_{[-1,1]}}{2} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}(1 - |x/2|)_+ \quad (1)$$

Veranschaulichen Sie sich diese Formel graphisch.

(b) Beweisen Sie

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} (1 - |x/2|)_+ dx = \begin{cases} \frac{\sin^2 k}{k^2} & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

- (i) direkt mit Techniken aus der Analysis 1,
- (ii) mit der Faltungsformel (1) und Lemma 2.66.

11.2ε Rechenregeln für die Faltung. Es seien μ, ν, κ drei endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Zeigen Sie:

- (a) *Kommutativgesetz:* $\mu * \nu = \nu * \mu$,
- (b) *Assoziativgesetz:* $\mu * (\nu * \kappa) = (\mu * \nu) * \kappa$,
- (c) *Distributivgesetz:* $\mu * (\nu + \kappa) = \mu * \nu + \mu * \kappa$.

11.3 Die Cauchyverteilung. Die Cauchyverteilung Cau_a zum Parameter $a > 0$ ist das durch

$$\text{Cau}_a(dx) = \frac{1}{\pi} \frac{a dx}{a^2 + x^2}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a)ε (**Skalierungseigenschaft**) Für $t > 0$ sei $m_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m_t(x) = tx$ die Multiplikation mit t . Zeigen Sie für $a, t > 0$:

$$m_t[\text{Cau}_a] = \text{Cau}_{ta}$$

(b)* (**Faltungseigenschaft**) Beweisen Sie für $a, b > 0$:

$$\text{Cau}_a * \text{Cau}_b = \text{Cau}_{a+b}$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

11.4 Rechenregeln für die Einsetzoperation. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $p, q \in \mathbb{N}$.

(a) ε Zeigen Sie, dass die Einsetzoperation

$$i : V \times \bigwedge^p V' \rightarrow \bigwedge^{p-1} V', \quad (v, \omega) \mapsto i_v \omega$$

bilinear ist.

(b) ε Zeigen Sie

$$i_v i_w \omega = -i_w i_v \omega$$

für alle $v, w \in V$ und $\omega \in \bigwedge^p V'$ mit $p \geq 2$.

(c) (**Antikommutative Produktregel**) Zeigen Sie für $v \in V$, $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$:

$$i_v(\omega \wedge \chi) = (i_v \omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (i_v \chi)$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 13.01.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 11

T11.1 Es sei $\mu = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Berechnen Sie $\mu * \mu$. Zeichnen Sie den Graphen von $a \mapsto \mu * \mu(\{a\})$, $a \in \mathbb{Z}$, und veranschaulichen Sie sich seine Entstehung an Hand einer Graphik des Quadrats $\{0, 1, 2\}^2$.

T11.2 Faltung einer Dichte mit einem Maß. Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Das Maß ν besitze eine Dichte $g = d\nu/d\lambda_n$. Beweisen Sie

$$\frac{d(\mu * \nu)}{d\lambda_n}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) \mu(dx) \quad \text{für } \lambda_n\text{-fast alle } z \in \mathbb{R}^n.$$

T11.3 Faltungseigenschaft der Chi-Quadrat-Verteilung. Zeigen Sie

$$\chi_m^2 * \chi_n^2 = \chi_{m+n}^2$$

für $m, n \in \mathbb{N}$.

T11.4 Rechenregeln für den Rückzug. Es seien U, V, W endlichdimensionale $\mathbb{R}$ -Vektorräume, $f : V \rightarrow W$ und $g : U \rightarrow V$ lineare Abbildungen und $p \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f^* : \bigwedge^p W' \rightarrow \bigwedge^p V'$ ist linear.

(b) **Funktorialität:** Es gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* : \bigwedge^p W' \rightarrow \bigwedge^p U'$$

(c) $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{\bigwedge^p V'}$

(d) Für $\omega \in \bigwedge^p V'$ und $\chi \in \bigwedge^q V'$ gilt:

$$f^*(\omega \wedge \chi) = f^*\omega \wedge f^*\chi$$

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „**ε**“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „*****“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.