Übungen zur Analysis 3
Lösungen

10.1 Produktdichten. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume und ρ_1 bzw. ρ_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_1 \ll \rho_1$ und $\mu_2 \ll \rho_2$. Zeigen Sie:

$$\frac{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}{d(\rho_1 \otimes \rho_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\mu_1}{d\rho_1}(\omega_1)\frac{d\mu_2}{d\rho_2}(\omega_2)$$

für $\rho_1 \otimes \rho_2$-fast alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Lösung

Seien $f_i, i = 1, 2$ Dichten mit

$$\mu_i(A_i) = \int_A f_i \, d\rho_i,$$

für $A_i \in \mathcal{A}_i$. Es ist zu zeigen, dass für $f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$ gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_A f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Nach der Charakterisierung des Produktmaßes genügt es die Gleichung für $A = A_1 \times A_2$ zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) &= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \\
&= \int_{A_1} f_1(\omega_1) \, d\mu_1(\omega_1) \int_{A_2} f_2(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \\
&= \int_{A_1} \int_{A_2} f_1(\omega_1) f_2(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) d\mu_1(\omega_1) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{A_1 \times A_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

10.2 Integration in Kugelkoordinaten.

(a) Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda_3 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \frac{e^{-\|x\|_2}}{\|x\|_2} \, \lambda_3(dx)$$

Lösung

(a) In Analysis II, Aufgabe 10.2 (vgl. auch Analysis II, Aufgabe 10.4 und Aufgabe 10.4* auf diesem Blatt) hatten wir die Funktionaldeterminante mit $r^2 \sin\theta$ berechnet. Das Ergebnis folgt jetzt aus dem Transformationssatz für die Transformation

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \ (r, \phi, \theta) \mapsto (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

(b) Mit Teil (a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \frac{e^{-\|x\|_2}}{\|x\|_2} \lambda_3(dx) &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r}}{r} r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr = 2\pi^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \ d\theta \cdot \int_0^{\infty} e^{-r} r \ dr \\ &= 4\pi^2 \left(- e^{-r} r \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-r} \ dr \right) = -4\pi^2 \ e^{-r} \Big]_0^{\infty} = 4\pi^2 \end{aligned}$$

10.3 Vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche. Für gegebenes $f \in \overline{M}_+([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[))$ definieren wir die Menge

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) | \ 0 \leq \phi < 2\pi, \ 0 \leq r < f(\phi)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_2(M) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi)^2 \, d\phi.$$

Dies gibt der in der Analysis 1 heuristisch-anschaulich begründeten Formel für die vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche einen rigorosen Sinn.

Lösung

Wir verwenden den Transfomationssatz. Dafür betrachte den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi \colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \\ (\phi, r) &\longmapsto (r\cos(\phi), r\sin(\phi)). \end{aligned}$$

Dann ist $|\det D\varphi(\phi, r)| = r$ und aus dem Transfomationssatz folgt

$$\begin{aligned} \lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})} 1_M \, d\lambda_2 \\ &= \int_{(0,2\pi) \times \mathbb{R}^+} 1_M \circ \varphi \cdot |\det D\varphi| \ d\lambda_2 \\ &= \int_{(0,2\pi) \times \mathbb{R}^+} 1_M \circ \varphi(\phi, r) \cdot r \ d\lambda_2(\phi, r) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} 1_M \circ \varphi(\phi, r) \cdot r \ dr \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\phi)} r \ dr \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi)^2 \, d\phi. \end{aligned}$$

10.4∗ Das normierte Oberflächenmaß auf der Einheitssphäre. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_{n+1}(dx) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2}\, \lambda_{n+1}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

die $n+1$-dimensionale Standardnormalverteilung, eingeschränkt auf $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}))$. Weiter sei $N : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $N(x) = x/\|x\|_2$, die Normierungsabbildung auf die n-Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \|x\|_2 = 1\}.$$

Das normierte Oberflächenmaß auf $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ wird definiert als das Bildmaß $\Omega_n := N[\nu_{n+1}]$.

(a) Berechnen Sie die Dichte $d\pi[\Omega_n]/d\lambda_n$ des Bildmaßes von Ω_n unter der Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

(b) Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\, d\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \int_0^\infty \int_{S^n} f(rx)\, \Omega_n(dx)\, r^n\, dr \tag{1}$$

Hinweis: Lassen Sie sich von der Herleitung des $n+1$-dimensionalen Kugelvolumens inspirieren. Man nennt den Vorfaktor $\frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = (n+1)\lambda_{n+1}(B_{n+1})$ auch die *Oberfläche* der Einheitssphäre S^n.

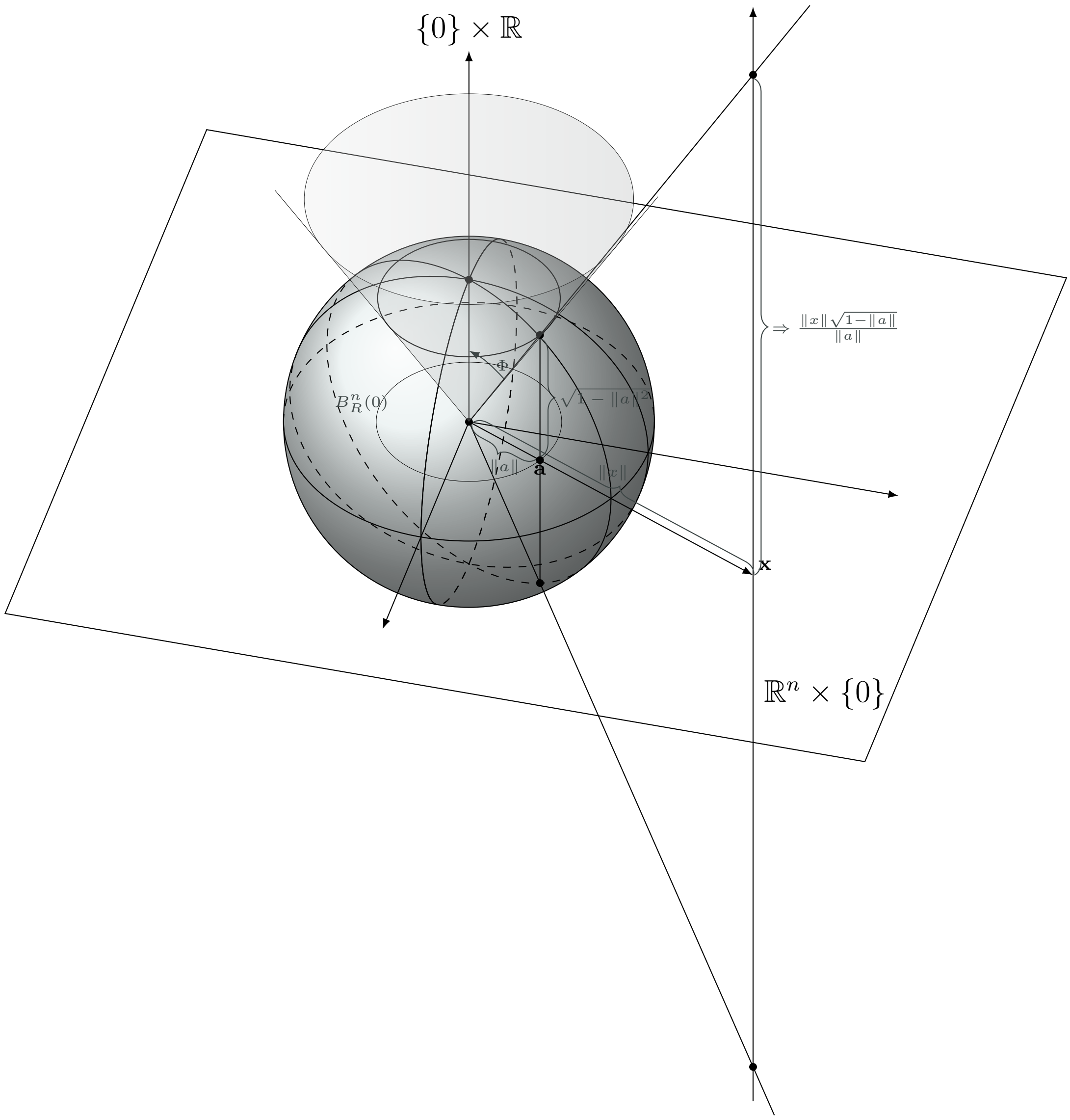
Lösung

(a) Es ist

$$\pi[\Omega_n](A) = \Omega_n(\pi^{-1}(A)) = \nu_{n+1}(\pi \circ N)^{-1}(A) = \int_{(\pi\circ N)^{-1}(A)} (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2}\, \lambda_{n+1}(dx).$$

Man beachte, dass $(\pi \circ N)^{-1}(\{a\}) = (a, \sqrt{1 - \|a\|^2}) \cdot \mathbb{R}$. Wir halten $x \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ fest und berechnen $(\pi\circ N)^{-1}(A)_x$ für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Es ist $(\pi\circ N)^{-1}(A) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = (\pi\circ N)^{-1}(x \cdot \mathbb{R}_+ \cap A \cap B_1^n(0)) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \{x\} \times \left\{ \pm \frac{\sqrt{1-\|a\|^2}\|x\|}{\|a\|}, a \in x \cdot \mathbb{R}_+ \cap A \cap B_1^n(0) \right\}, x \neq 0$[1] wobei $B_1^n(0)$ der Einheitball in der $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ Ebene ist. Die Rechnung kann von der folgenden Zeichnung abgelesen werden

[1]Da die Faser über x eine niedrig dimensionale Untermfgk. ist, ist sie eine Nullmenge und wir können für unsere Integration o. B. d. A. $x \neq 0$ annehmen. Die Faser für $x = a$ ist $\{0\} \times \mathbb{R}$.



Sei $A \times \mathrm{id} \in \mathrm{SO}(n) \times \{\mathrm{id}\} \subset \mathrm{SO}(n+1)$, dann ist $\pi^{-1}(Ax) = (A \times \mathrm{id})(\pi^{-1}(x))$, d. h. die Rotationsinvarianz der Normalverteilung impliziert die $\mathrm{SO}(n)-$rotationsinvarianz des Bildmaßes. Wie in Teil (b) genügt es jetzt Bälle $B_R^n(0) \times \{0\}$ zu betrachten. Für diese ist das Maß der $\|x\|$-Faser aber gerade $\nu_1\left(\left[\frac{\pm\sqrt{1-\|R\|^2}}{R}\|x\|, \pm\infty\right[\right)$.

Wir führen n-dimensionale sphärische Koordinaten ein. Sei

$$x_{n+1} = r\cos(\phi_1),\ x_n = r\cos(\phi_2)\sin(\phi_1),\ \ldots$$
$$\ldots\quad x_2 = r\cos(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1),\ x_1 = r\sin(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1).$$

Dies ist ein Diffeomorphismus $T^{n+1} : \mathbb{R}_+ \times [0,\pi]^{n-1} \times [0, 2\pi[\Rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: Die Abbildung ist offensichtlich glatt. Sie ist injektiv, denn aus $(r, (\phi_i)_i) = (r', (\phi_i')_i)$ folgt zunächst $\|T^{n+1}(r, (\phi_i)_i)\| = r = r' = \|T^{n+1}(r', (\phi_i)_i')\|$ und $\phi_1 = \phi_1'$ aus der Injektivität des Kosinus. Entsprechend erhält man schrittweise $\phi_i = \phi_i', i = 1, \ldots, n-1$. Die Abbildung ist auch surjektiv, denn zu $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ setze man $r = \|x\|$. Da $|x_{n+1}| \leq \|x\|$ gibt es ein $\phi_1 \in [0,\pi]$ s. d. $r\phi_1 = x_{n+1}$. Weiter ist $x_n^2 \leq r^2 - x_{n+1}^2 = r^2(1 - \cos^2(\phi_1)) = r^2\sin^2(\phi_1) \Rightarrow |x_n| \leq r\underbrace{\sin(\phi_1)}_{\geq 0}$. Jetzt finden wir $\phi_2 \in [0,\pi]$ mit $r\cos(\phi_2)\sin(\phi_1) =$

x_n. Analog kann man $\phi_3, \ \ldots, \phi_{n-1} \in [0,\pi]$ konstruieren. Im letzten Schritt wählen wir $\phi_n \in [0, 2\pi[$ s. d. auch $x_1 = r\sin(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1)$ erfüllt ist. Es gilt $x_1^2 = r^2\sin^2(\phi_n)\sin^2(\phi_{n-1})\cdots\sin^2(\phi_1)$ und x_1 ist damit bis auf Vorzeichen, d. h. bis auf Wahl von $\phi_n \in [0,\pi[$ oder $\phi_n \in [\pi, 2\pi[$ festgelegt.
Wir betrachten als nächstes die Jacobimatrix

$$DT^{n+1} = \begin{pmatrix} \sin(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1) & r\sin(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\cos(\phi_1) & \ldots & \ldots & \ldots & r\cos(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1) & r\cos(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\cos(\phi_1) & \ldots & \ldots & \ldots & -r\sin(\phi_n)\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cos(\phi_2)\sin(\phi_1) & r\cos(\phi_2)\cos(\phi_1) & -r\sin(\phi_2)\sin(\phi_1) & 0 & \ldots & 0 \\ \cos(\phi_1) & -r\sin(\phi_1) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ergibt sich mit Induktion und

$$DT = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\phi_n) & \sin(\phi_n) & 0 \\ -\sin(\phi_n) & \cos(\phi_n) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:C} \cdot DT^{n+1}|_{\phi_n=0},$$

$$\det(C) = 1, \ \det(DT^{n+1}|_{\phi_n=0}) = r\sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1)\det(DT^n)$$

zu

$$\det(DT^{n+1}) = \sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1)^{n-1}r^n.$$

Man beachte, dass die Determinante bereits positiv ist.

Wegen der Rotationssymmetrie und der Normierung der Standardnormalverteilung ist $\nu((\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0)))$ gerade der Anteil des Raumes, den der Doppelkegel $(\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0))$ einnimmt. Mit der Transformation $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$[2] und dem Transformationssatz folgt

$$\frac{\lambda_{n+1}((\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0)) \cap B_{r'}^{n+1}(0))}{\lambda_{n+1}(B_{r'}^{n+1}(0))} = \frac{\lambda_{n+1}((\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0)) \cap B_1^{n+1}(0))}{\lambda_{n+1}(B_1^{n+1}(0))}$$

und da die rechte Seite existiert, existiert auch der Grenzwert $r' \to \infty$. Es bleibt somit die Bestimmung des Volumens von $(\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0)) \cap B_1^{n+1}(0) = T([0,1]\times[0,\Phi_1]\times[0,\pi]\times\cdots\times[0,\pi]\times[0,2\pi[)$. Mit der Darstellung in sphärischen Koordinaten und $\phi_1 = \arcsin r'$; $\Phi = \arcsin R$ (siehe Zeichung) ergibt sich[3]

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}((\pi\circ N)^{-1}(B_R^n(0)) \cap B_1^{n+1}(0)) &= 2\int_0^\Phi \int_0^1 r^n \sin(\phi_{n-1})\cdots\sin(\phi_1)^{n-1} \ d\phi_2\ldots d\phi_n \ dr \ d\phi_1 \\ &= \frac{2n\lambda_n(B_1^n(0))}{n+1}\int_0^\Phi \sin(\phi_1)^{n-1} \ d\phi_1 \\ &= \frac{2n\lambda_n(B_1^n(0))}{n+1}\int_0^R (r')^{n-1}\frac{\partial\arcsin(r')}{\partial r'} \ dr' \\ &= \frac{2n\lambda_n(B_1^n(0))}{n+1}\int_0^R \frac{(r')^{n-1}}{\sqrt{1-(r')^2}} \ dr'. \end{aligned}$$

Unsere Dichte $f(r,(\phi_i)_i) = \frac{2n\lambda_n(B_1^n(0))\cdot r^{n-1}\cdot 1_{[0,1]}(r)}{(n+1)\lambda_{n+1}(B_1^{n+1}(0))\sqrt{1-r^2}}$ in Polarkoordinaten lässt sich in kartesischen Koordinaten als $f((x_i)_i) = \frac{2n\lambda_n(B_1^n(0))\cdot\|x\|^{n-1}\cdot 1_{B_1^n(0)}(x)}{(n+1)\lambda_{n+1}(B_1^{n+1}(0))\sqrt{1-\|x\|^2}}$ schreiben.

[2]Man prüfe nach, dass dies ein Diffeomorphismus mit Umkehrung $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$ ist.

[3]Wir verwenden den Satz von Fubini. Der Faktor 2 muss durch die Einschränkung auf die obere Hemisphäre (Rotationssymmetrie) hinzugefügt werden.

(b) Wir erhalten

$$\frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \int_0^R \int_{S^n} 1\, \Omega_n(dx)\, r^n\, dr = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \cdot \frac{R^{n+1}}{n+1} = \lambda_{n+1}(B_R(0)).$$

Wie die Standardnormalverteilung ist auch das Maß $\nu = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}\Omega_n(dx)\, r^n\, dr$ rotations-invariant.[4]. Wir zerlegen die zentrierte Kugel vom Radius r in m^n gleich große Teile: Z. B. können wir die sphärischen Koordinaten $\varphi_1 \in [0, 2\pi[,\ \varphi_i \in [0, \pi[, i = 2, \ldots, n$ jeweils in m Teile V_i zerlegen. Dann lassen sich alle entstehenden Kugelsektoren durch Drehung in einander überführen, d. h. sie haben das gleiche Maß. Da sie die Kugel disjunkt[5] überdecken haben sie Volumen $\frac{\lambda_{n+1}(B_1(0))}{m^n}$ auch in unserem Maß ν. Entsprechend stimmt das Maß von ν auch auf $B_r(0) \setminus B_{r-\delta}(0)$ und jedem Sektor $V_i \cap B_r(0) \setminus B_{r-\delta}(0)$ mit dem Lebesguemaß überein. Diese Mengen erzeugen aber die Topologie auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$, denn wir können für jedes $x \in U$ offen ein $r = \|x\|$ finden und eine genügend kleine Zerlegung der $B_{r+\delta}(0)$ Kugel, s. d. einer der Sektoren $V_x \subset B_{r+\delta}(0) \setminus B_{r-\delta}(0)$ bereits $x \in V_x \subset U$ erfüllt. [6] Also stimmen ν und Lebesguemaß auch auf der Borelschen $\sigma-$Algebra überein und die Behauptung folgt.

[4]Die Dichte hängt nur vom Betrag ab und das Lebesguemaß ist rotations-invariant.

[5]Bis auf eine Untermfgk. vom Volumen 0.

[6]Man beachte es gilt $U = \bigcup_{x\in U} V_x$.