Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 10
13.12.2013

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

10.1 Produktdichten. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume und ρ_1 bzw. ρ_2 σ-endliche Maße auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_1 \ll \rho_1$ und $\mu_2 \ll \rho_2$. Zeigen Sie:

$$\frac{d(\mu_1 \otimes \mu_2)}{d(\rho_1 \otimes \rho_2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\mu_1}{d\rho_1}(\omega_1)\frac{d\mu_2}{d\rho_2}(\omega_2)$$

für $\rho_1 \otimes \rho_2$-fast alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

10.2 Integration in Kugelkoordinaten.

(a) Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}(\mathbb{R}^3))$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda_3 = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \frac{e^{-\|x\|_2}}{\|x\|_2} \, \lambda_3(dx)$$

10.3 Vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche. Für gegebenes $f \in \overline{M}_+([0, 2\pi[, \mathcal{B}([0, 2\pi[))$ definieren wir die Menge

$$M = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) | \; 0 \le \phi < 2\pi, \; 0 \le r < f(\phi)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\lambda_2(M) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\phi)^2 \, d\phi.$$

Dies gibt der in der Analysis 1 heuristisch-anschaulich begründeten Formel für die vom Ortsvektor in Polarkoordinaten überstrichene Fläche einen rigorosen Sinn.

10.4* Das normierte Oberflächenmaß auf der Einheitssphäre. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_{n+1}(dx) = (2\pi)^{-(n+1)/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2} \, \lambda_{n+1}(dx), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

die $n+1$-dimensionale Standardnormalverteilung, eingeschränkt auf $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}))$. Weiter sei $N : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $N(x) = x/\|x\|_2$, die Normierungsabbildung auf die n-Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \; \|x\|_2 = 1\}.$$

Das normierte Oberflächenmaß auf $(S^n, \mathcal{B}(S^n))$ wird definiert als das Bildmaß $\Omega_n := N[\nu_{n+1}]$.

(a) Berechnen Sie die Dichte $d\pi[\Omega_n]/d\lambda_n$ des Bildmaßes von Ω_n unter der Projektion $\pi : S^n \to \mathbb{R}^n$, $\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Zeigen Sie für alle $f \in \overline{M}_+(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f \, d\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \int_0^\infty \int_{S^n} f(rx) \, \Omega_n(dx) \, r^n \, dr \tag{1}$$

Hinweis: Lassen Sie sich von der Herleitung des $n+1$-dimensionalen Kugelvolumens inspirieren. Man nennt den Vorfaktor $\frac{(n+1)\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = (n+1)\lambda_{n+1}(B_{n+1})$ auch die *Oberfläche* der Einheitssphäre S^n.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 23.12.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 10

T10.1 Dimensionsreduzierende lineare Transformation von Normalverteilungen. Es seien $m \leq n$ zwei natürliche Zahlen, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang m und $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige Multiplikationsabbildung. Beweisen Sie $L_A[\nu_\Sigma] = \nu_{A \Sigma A^t}$.
Hinweis: Der Spezialfall $m = n$ ist Ihnen aus Beispiel **??** schon bekannt. Reduzieren Sie den allgemeinen Fall mit Hilfe von Lemma **??** auf diesen Spezialfall.

T10.2 Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass das Mengensystem aller endlichen Vereingungen kompakter Quader in V einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(V)$ bildet.

T10.3 Volumentransformation mit der Riemannschen Metrik. Es seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Weiter sei $g : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(x) = Df(x)^t Df(x)$. (Man nennt g die mit f zurückgezogene Riemannsche Metrik zum euklidischen Skalarprodukt.) Zeigen Sie:

$$\lambda_n(V) = \int_U \sqrt{\det g}\, d\lambda_n$$

T10.4 Die Chi-Quadrat-Verteilung. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu_n(dx) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_2^2}\, \lambda_n(dx), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

die n-dimensionale Standardnormalverteilung. Die Chi-Quadrat-Verteilung χ_n^2 mit n Freiheitsgraden wird definiert als das Bildmaß $\chi_n^2 := q[\nu_n]$ von ν_n unter der Norm-Quadrat-Abbildung $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$, $q(x) = \|x\|_2^2$. Zeigen Sie:

$$\chi_n^2(dt) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2}\, dt, \quad t \geq 0.$$

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{*}$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.