Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 9
05.12.2013

Übungen zur Analysis 3
Lösung

9.1 Randdichten einer Gleichverteilung. Die Gleichverteilung auf dem Dreieck

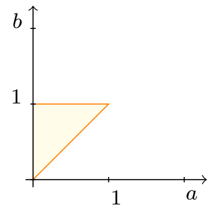
$$\Delta := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

ist das Maß

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \frac{\lambda_2(A \cap \Delta)}{\lambda_2(\Delta)}.$$

Berechnen Sie die beiden Randdichten von ν bezüglich des Lebesguemaßes.

Lösung



Man beachte die Form des Dreiecks auf der rechten Seite. Es gilt $\Delta = \coprod_{a\in[0,1]}\{a\} \times [a,1] = \coprod_{b\in[0,1]}[0,b] \times \{b\}$. Folglich ist $\pi_1(\nu)(A) = \nu(\pi_1^{-1}(A)) = \int_{\pi_1^{-1}(A)} d\nu = \frac{1}{\lambda_2(\Delta)} \int_{\pi_1^{-1}(A)} 1_\Delta \, d\lambda_2 = 2\int_0^1 \lambda_1((\pi_1^{-1}(A))_a) \, da = 2\int_0^1 1_A \lambda_1([a,1]) \, da = 2\int_A 1_{[0,1]}(1-a) \, \lambda_1(da)$ und wir erhalten die Randdicht $f_1(a) = (2-2a) \cdot 1_{[0,1]}$. Analog erhält man $\pi_2(\nu(B)) = 2\int_A 1_{[0,1]} b \, \lambda_1(dB)$, d. h. Randdicht $f_2(b) = 2b$.

9.2 Modifizierte Besselfunktionen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *modifizierten Besselfunktionen* $I_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $K_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \cos(nt) \, dt,$$
$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh t} \cosh(nt) \, dt$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Sowohl I_n als auch K_n erfüllt die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die durch

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + n^2) y(x) = 0$$

gegeben wird. Achten Sie bei der Begündung sorgfältig auf die Rechtfertigung der Vertauschung von Integral und Ableitung.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Asymptotik:

$$\sqrt{2\pi x} e^{-x} I_n(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^{x} K_n(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Lösung

zu (a): Es gilt

$$2\pi I_n'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) e^{x\cos(t)} \cos(nt)dt$$
$$2\pi I_n''(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t) e^{x\cos(t)} \cos(nt)dt.$$

Die Vertauschung von Integral und Ableitung ist unproblematisch, da $[-\pi,\pi]$ endliches Maß hat und gegeben $x_{\in}\mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \cos(t)e^{x\cos(t)}\cos(nt)$, bzw. $x \mapsto \cos^2(t)e^{x\cos(t)}\cos(nt)$ auf (x_0-1, x_0+1) beschränkt ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
n^2 2\pi I_n(x) = n \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos(t)} \underbrace{n\cos(nt)}_{=\sin(nt)'} dt \\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} -n \int_{-\pi}^{\pi} x(-\sin(t))e^{x\cos(t)} \sin(nt)dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin(t))e^{x\cos(t)} \underbrace{n\sin(nt)}_{=-\cos(nt)'} dt \\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x\cos(t)e^{x\cos(t)} - x^2\sin^2(t)e^{x\cos(t)}\right)\cos(nt)dt \\
&= xI_n'(x) + x^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(t)-1)e^{x\cos(t)}\cos(nt)dt \\
&= x2\pi I_n'(x) + x^2 2\pi I_n''(x) - x^2 2\pi I_n(x).
\end{aligned}$$

Was zu zeigen war.

Für $2K_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x\cosh(t)}\cosh(nt)dt$ beachte, dass

$$\cosh(t)e^{-x\cosh(t)} \leq \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})e^{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}.$$

Die Integriebarkeit von $\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})e^{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}$ folgt aus der Substitution $t \mapsto \log(t)$. Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dx}\left(e^{-x\cosh(t)}\cosh(nt)\right)\right| &= x\cosh(t)e^{-x\cosh(t)}\cosh(nt) \\
&\leq x\frac{1}{4}(e^t+e^{-t})(e^t)^n + (e^{-t})^n)e^{-\frac{e^t+e^{-t}}{2}}
\end{aligned}$$

und widerum zeigt die Substitution $t \mapsto \log(t)$, dass auch die Ableitung des Integranden integrierbar ist, die auf allen Intervallen der Form (x_0-1, x_0+1) eine integrierbare Majorante besitzt. Also können Integral und Ableitung vertauscht werden. Es folgt

$$2K_n'(x) = -\int_{\mathbb{R}} x\cosh(t)e^{-x\cosh(t)}\cosh(nt)dt$$

und

$$2K_n''(x) = \int_{\mathbb{R}} x^2\cosh^2(t)e^{-x\cosh(t)}\cosh(nt)dt.$$

(Die Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung zur Berechnung von $K_n''(x)$ folgt ähnlich wie im Fall $K_n'(x)$.) Analog zum Fall $I_n(x)$ berechnet man mit partieller Integration und unter Verwendung von $\cosh(nt)' = -n\sinh(nt)$ und $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, dass

$$n^2K_n(x) = xK_n'(x) + x^2K_n''(x) - x^2K_n(x).$$

zu (b): Wir verwenden die Laplace-Methode für asymptotische Gaußsche Integrale. Da die Notation im Skript und in der Aufgabe hierfür etwas verwirrend sind, schreiben wir

$$I_r(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{cos(x)})^n\cos(rx)dx.$$

Dann hat $f(x) = e^{\cos(x)}$ in O ein globales Maximum und es gilt $f(0) = e$ und $b = |(\log f)''(0)| = 1$. Damit folgt aus Lemma 2.32, dass

$$\sqrt{2\pi n}e^{-n}I_r(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\frac{\sqrt{n}}{f(0)^n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^n\cos(rx)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{b}}\cos(r\cdot 0) = \cos(0) = 1.$$

Die Rechnung für $K_n(x)$ folgt analog.

9.3ε Vollziehen Sie den Beweis des Satzes 2.37[1] elementargeometrisch am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nach: Berechnen Sie hierzu (mit Notationen wie im Beweis des Satzes) die Matrizen L, B, K, C und zeichnen Sie Π_A, Π_B und Π_C auf kariertes Papier, am besten farbig. Überlegen Sie sich auch elementargeometrisch, dass Π_A, Π_B und Π_C den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Lösung

Es ist $a_{22} = 1$ und L muss $La_2 = e_2,\ Le_1 = e_1$ für die zweite Spalte a_2 erfüllen. D. h.

$$L = (e_1, e_2)(e_1, a_2)^{-1} = (e_1, a_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$B = LA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

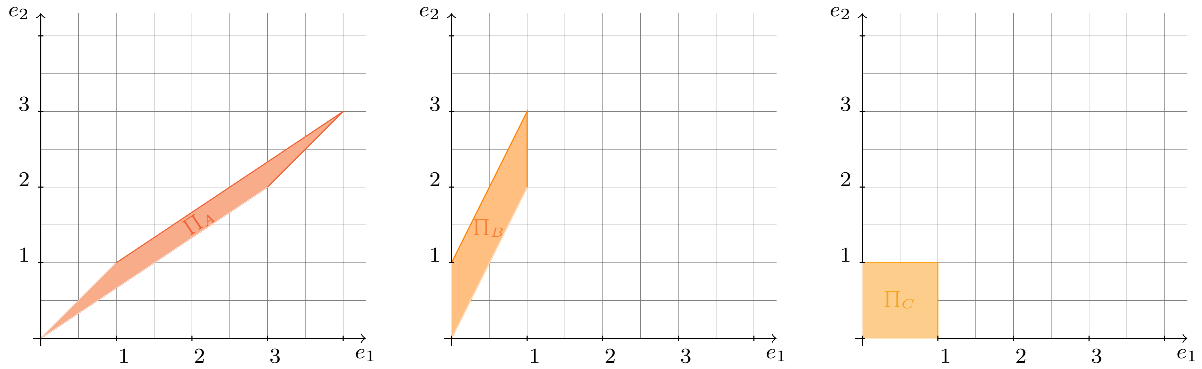
Als nächstes definieren wir $b_1 = La_1 = (1,2)^t = (b_1', b_1'')^t,\ b_2 = La_2 = (0,1)^t = (b_2', b_2'')^t = e_2$ als die Spalten von B und bestimmen $K = (k_{ij})_{ij}$ mit $Kb_2 = b_2$ und $(Kb_1)' := k_{11}b_1' + k_{12}b_1'' = b_1' = 1, (Kb_1)'' := k_{21}b_1' + k_{22}b_1'' = 0$. Wir erhalten

$$K = (e_1, e_2)(b_1, e_2)^{-1} = (b_1, e_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$C = KB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte:



.

$\prod_B$ ist ein Parallelogramm. $\prod_B$ hat eine Seitenlänge 1 und die entsprechende Höhe ist ebenfalls 1, d. h. Flächeninhalt $1 = \lambda_2(\prod_C)$. Zur Berechnung von $\prod_A$ können wir z. B. die Fläche entlang der längeren Diagonalen in zwei gleichgroße Teile zerlegen und das Volumen des Teilstückes unterhalb (aus e_1-Richtung) der Diagonale liegenden Anteils als Differenz von Dreiecken und einem Trapez berechnen:

$$\lambda_2\left(\prod_A\right) = 2\left(\frac{3\cdot 4}{2} - \frac{(4-3)\cdot(3-2)}{2} - \frac{1+4}{2}\cdot 2\right) = 1.$$

9.4 Fouriertransformierte der multidimensionalen Normalverteilung. Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix und ν_Σ die zentrierte multidimensionale Normalverteilung zur Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Formel (20) aus Beispiel 1.153[1]:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\,\nu_\Sigma(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^t\Sigma k\right) \tag{1}$$

Lösung

Es ist zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det\Sigma}}e^{\frac{1}{2}x^t\Sigma^{-1}x}dx = e^{-\frac{1}{2}k^t\Sigma k}.$$

[1] Analysis III Skript.

Dazu sei wie in Beispiel 2.41 A eine Matrix mit $\Sigma^{-1} = A^t A$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle} e^{-\frac{1}{2}x^t\Sigma^{-1}x} dx &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle} e^{-\frac{1}{2}(Ax)^t(Ax)} dx \\
&\overset{x\mapsto Ax}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,A^{-1}x\rangle} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} |\det A^{-1}| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle (A^t)^{-1}k,x\rangle} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} dx \\
&\overset{k'=(A^t)^{-1}k}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k',x\rangle} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \Pi_{j=1}^n e^{ik'_j,x_j} e^{-\frac{1}{2}x_j^2} dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \Pi_{j=1}^n e^{ik'_j,x_j} e^{-\frac{1}{2}x_j^2} dx_1 \dots dx_n \\
&= \Pi_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} e^{ik'_j,x_j} e^{-\frac{1}{2}x_j^2} dx_j \\
&= \Pi_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}k'_j} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\langle k',k'\rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\langle (A^t)^{-1}k,(A^t)^{-1}k\rangle} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(((A^t)^{-1})k)^t(A^t)^{-1}k} \\
&= e^{-\frac{1}{2}((A^{-1})^t k)^t(A^{-1})^t k} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(k^t(\Sigma^t)^{-1}k} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(k^t(\Sigma)^{-1}k}.
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile der Transformationssatz verwendet wurde, die dritte Gleichung aus $\det A^{-1} = (\det \Sigma)^{-1}$ folgt, zur Berechnung der Integrale Beispiel 1.53 verwendet wurde und die letzte Gleichung gilt, weil Σ symmetrisch ist.