MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 9
05.12.2013

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

9.1 Randdichten einer Gleichverteilung. Die Gleichverteilung auf dem Dreieck

$$\Delta := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

ist das Maß

$$\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \quad \nu(A) = \frac{\lambda_2(A \cap \Delta)}{\lambda_2(\Delta)}.$$

Berechnen Sie die beiden Randdichten von ν bezüglich des Lebesguemaßes.

9.2 Modifizierte Besselfunktionen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *modifizierten Besselfunktionen* $I_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $K_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \cos(nt)\, dt,$$
$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x \cosh t} \cosh(nt)\, dt$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Sowohl I_n als auch K_n erfüllt die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die durch

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + n^2)y(x) = 0$$

gegeben wird. Achten Sie bei der Begündung sorgfältig auf die Rechtfertigung der Vertauschung von Integral und Ableitung.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die folgende Asymptotik:

$$\sqrt{2\pi x} e^{-x} I_n(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^{x} K_n(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

9.3ε Vollziehen Sie den Beweis des Satzes 2.37[1] elementargeometrisch am Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nach: Berechnen Sie hierzu (mit Notationen wie im Beweis des Satzes) die Matrizen L, B, K, C und zeichnen Sie Π_A, Π_B und Π_C auf kariertes Papier, am besten farbig. Überlegen Sie sich auch elementargeometrisch, dass Π_A, Π_B und Π_C den gleichen Flächeninhalt besitzen.

9.4 Fouriertransformierte der multidimensionalen Normalverteilung. Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Sigma = \Sigma^t$, eine positiv definite Matrix und ν_Σ die zentrierte multidimensionale Normalverteilung zur Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der Formel (20) aus Beispiel 1.153[1]:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\,\nu_\Sigma(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}k^t\Sigma k\right) \tag{1}$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 16.12.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

[1] Analysis III Skript.

Präsenzaufgaben zu Blatt 9

T9.1 Vertauschbarkeit und Nichtvertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume.

(a) Es sei

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2). \tag{2}$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1)\, \mu_2(d\omega_2).$$

(b) Nun sei

$$f \in M(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

mit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)|\, \mu_2(d\omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) < \infty.$$

Überlegen Sie sich, dass in diesem Fall die Integrierbarkeitsvoraussetzung (2) des Teils 1. gilt.

(c) Nun sei

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda_1|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)})$$

und

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 1_{\{x<y<x+1\}} - 1_{\{x-1<y<x\}}.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f\, d\mu_1 \otimes \mu_2$$

undefiniert ist. Zeigen Sie insbesondere

$$f \notin \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

Zeigen Sie auch

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y)\, dy\, dx \neq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f(x, y)\, dx\, dy,$$

indem Sie beide Integrale berechnen.

T9.2 Es sei M eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wobei $m < n$. Zeigen Sie $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(M) = 0$.

T9.3 Randverteilungen und Randdichten. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, $\pi_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$, $\pi_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i$ für $i = 1, 2$ die beiden kanonischen Projektionen und ν ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_1, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Für $i = 1, 2$ heißt das Bildmaß

$\pi_i[\nu]$ die i-te *Randverteilung*[2] (engl.: *marginal*) von ν. Zeigen Sie: Besitzt ν eine Dichte $f = d\nu/d(\mu_1 \otimes \mu_2)$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-fast überall, so besitzt die Randverteilung $\pi_1[\nu]$ die Dichte

$$f_1 = \frac{d\pi_1[\nu]}{d\mu_1}, \quad f_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \quad \mu_1\text{-f.ü..}$$

Ebenso besitzt $\pi_2[\nu]$ die Dichte

$$f_2 = \frac{d\pi_2[\nu]}{d\mu_2}, \quad f_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1) \quad \mu_2\text{-f.ü..}$$

f_1 und f_2 werden die beiden *Randdichten* (engl: *marginal density*) von ν bzgl. μ_1 und μ_2 genannt.

T9.4 Das Wallis-Produkt. Erinnern Sie sich daran, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}. \tag{3}$$

(Dies folgt durch Einsetzen von $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, Ausmultiplizieren mit der binomischen Formel und der Fourier-Orthonormalitätsrelation.)

(a) Zeigen Sie mit der Laplace-Methode

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\, dx \overset{\mathbb{N}\ni n\to\infty}{\longrightarrow} 2. \tag{4}$$

Hinweis: Zerlegen Sie das Integrationsgebiet $]0, 2\pi[$ in drei Bereiche: $I_1 =]\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon[$, $I_2 =]3\pi/2 - \epsilon, 3\pi/2 + \epsilon[$ und $I_3 =]0, 2\pi[\setminus (I_1 \cup I_2)$ mit einem beliebig fixierten $\epsilon \in]0, \pi/2[$.

(b) Folgern Sie aus (3) und (4):

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \binom{2n}{n} \overset{\mathbb{N}\ni n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{5}$$

Schreiben Sie diese Formel in der folgenden Form um:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

Diese Formel für die Kreiszahl π heißt *Wallissches Produkt.* Zur numerischen Berechnung von π ist es praktisch ohne Nutzen, da es recht langsam konvergiert.

(c) Finden Sie einen alternativen Beweis der Asymptotik (5) und damit des Wallisschen Produkts mit Hilfe von

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

und der Stirlingformel.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{*}$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.

[2] Vorwiegend wird diese Sprechweise in der Stochastik verwendet, wenn ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.