

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, die bevorzugt korrigiert werden sollen.

8.1 Momente der Standardnormalverteilung.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel (20)¹ aus Beispiel 1.153¹ für alle $k \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2} dx = e^{-k^2/2},$$

indem Sie zeigen, dass sich hier Summe und Integral vertauschen lassen.

(b) Folgern Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2} dx &= \frac{(2m)!}{2^m m!}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-x^2/2} dx &= 0. \end{aligned}$$

8.2 ϵ - δ -Charakterisierung der Absolutstetigkeit.

Es seien μ, ν zwei endliche Maße auf dem gleichen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

- (a) $\nu \ll \mu$,
- (b) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A} : [\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon]$.

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel auch, dass die Äquivalenz falsch werden kann, wenn zwar μ endlich ist, ν hingegen nur σ -endlich.

8.3 ϵ Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei nichtnegativen messbaren Integranden. Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume. Weiter sei $\tau : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_2 \times \Omega_1$, $\tau(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1)$ die Vertauschungsabbildung. Zeigen Sie:

- (a) τ ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_1$ -meßbar.
- (b) $\tau[\mu_1 \otimes \mu_2] = \mu_2 \otimes \mu_1$.
- (c) Folgern Sie mit dem Satz von Fubini: Für alle $f \in \overline{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt:

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2)$$

¹Skript Analysis III.

8.4 (a) Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ das n -dimensionale Simplex

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{k=1}^n x_k \leq 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass es das Volumen

$$\lambda_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$$

besitzt.

(b) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ das Volumen

$$V_n(t) := \lambda_n(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t\}).$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 09.12.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 8

T8.1 Likelihoodquotienten im Diskreten. Es sei Ω abzählbar. Weiter seien ν und $\tilde{\nu}$ zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit Zähldichten $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ bzw. $\tilde{p} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Zeigen Sie:

$$d\tilde{\nu} = \frac{\tilde{p}}{p} d\nu.$$

T8.2 Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < 1$. Weiter sei $f \in \overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass

$$g := \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)} 1_A + \frac{\int_{A^c} f d\mu}{\mu(A^c)} 1_{A^c}$$

eine bedingte Erwartung von f gegeben $\sigma(\{A\})$ ist.

T8.3 Produkt- σ -Algebra wird von den Projektionen erzeugt.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die kleinste σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, bezüglich der die beiden kanonischen Projektionen

$$X_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega_i, \quad X_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \quad (i = 1, 2)$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_i$ meßbar sind.

- (b) Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

T8.4 Das Cavalierische Prinzip.

- (a) Überzeugen Sie sich auch von folgendem *Cavalierischen Prinzip*:
Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sind $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ mit

$$\lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}) = \lambda_m(\{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in B\}),$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so folgt $\lambda_{n+m}(A) = \lambda_{n+m}(B)$.

- (b) Insbesondere gilt folgender Spezialfall:

Es seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ zwei messbare Bereiche im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$. Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}) = \lambda_2(\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in B\}),$$

d.h. Schnitte von A und von B mit den parallelen Ebenen zur y - z -Ebene besitzen die gleiche Fläche. Dann besitzen A und B das gleiche Volumen:

$$\lambda_3(A) = \lambda_3(B).$$

Zeigen Sie mit diesem Prinzip, dass die Einheitskugel

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

und das Differenzgebilde “Zylinder minus Doppelkegel”

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leq y^2 + z^2 \leq 1\}$$

das gleiche Volumen besitzen.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „**ε**“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „*****“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.