MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 7
21.11.2013

Übungen zur Analysis 3
Lösung

7.1 Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^4+tx^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^4+tx^2}\, dx.$$

Lösung

Mit Korollar 1.149 vertausche man Integral und Ableitung, was sofort das Ergebnis liefert. Wir überprüfen die Voraussetzungen von 1.149: Die Abbildung ist offensichtlich differenzierbar in t. Für die Integrierbarkeit von $e^{-x^4+tx^2}$, $x^2 e^{-x^4+tx^2}$ für alle t siehe die Bemerkung im Beweis zu Aufgabe 11.6, Analysis II.[1]

7.2 Gaußsches Integral im Komplexen. Es gilt für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \exp \frac{b^2}{4a},} \tag{1}$$

wobei $\sqrt{a}$ den Hauptwert der Quadratwurzel bezeichnet, also diejenige komplexe Zahl $w = \sqrt{a}$ mit $\operatorname{Re} w > 0$ und $w^2 = a$. In dieser Aufgabe dürfen Sie die erst später bewiesene Formel (21), Skript[2], voraussetzen.

(a) Zeigen Sie die Formel (1) zuerst im Spezialfall $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Verwenden Sie dazu eine quadratische Ergänzung, Translation und Skalierung.

(b)$*$ Zeigen Sie die Formel (1) dann im Spezialfall $b = 0$. Beweisen Sie hierzu, dass für die Funktion

$$f : \{a \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a > 0\} \to \mathbb{C}, \quad f(a) = \sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx$$

gilt: $df = 0$. Begründen und verwenden Sie hierbei

$$d\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, da,$$

(zu lesen als $d\sqrt{\cdot}_a(z) = z/(2\sqrt{a})$ für $a, z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$), zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen, angewandt auf die Gleichung $w^2 = a$ für $w = \sqrt{a}$. Vertauschen Sie Integral und Ableitung mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und integrieren Sie geeignet partiell.

[1] Man beachte, dass Differenzierbarkeit (in einem Punkt t_0) eine lokale Eigenschaft ist. Es genügt also eine Majorante zu finden für eine Funktionenfolge f_t wobei t über eine genügend kleine Umgebung um den Punkt t_0 variiert.

[2] $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

(c) Zeigen Sie schließlich die Formel (1) allgemein, indem Sie

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\frac{(bt)^2}{4a}\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+btx}\,dx\right]=0$$

für $t \in \mathbb{R}$ zeigen. Lassen Sie sich dabei vom Beweis des Beispiels 1.153 (Skript) inspirieren.

Lösung

a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int e^{-ax^2+bx}dx &= \int e^{-(\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}})^2+\frac{b^2}{4a}}dx \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\int e^{-(\sqrt{a}x-\frac{b}{4a})^2}dx \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\int e^{-(\sqrt{a}x)^2}dx && \text{wegen Beispiel 1.129, 1.} \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2a}} && \text{mit der Skalierung } x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2a}} \text{ und Bsp. 1.129, 2.} \\
&= e^{\frac{b^2}{4a}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.
\end{aligned}$$

b) Angenommen, wir hätten bereits gezeigt, dass $d\sqrt{\cdot}_a = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Dann folgt aus der Kettenregel

$$df(a) = d\sqrt{a}\cdot\int e^{-ax^2}dx+\sqrt{a}\,d\int e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int e^{-ax^2}dx-\sqrt{a}\,d\int e^{-ax^2}dx.$$

Man prüft leicht, dass die Voraussetzungen des Satzes über die Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung (Korollar 1.149) erfüllt sind. Also gilt

$$df(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int e^{-ax^2}dx-\sqrt{a}\int x^2e^{-ax^2}dx.$$

Partielle Integration ($\int f'gdx = [fg]-\int fg'dx$) mit $f=1$ und $g=e^{-ax^2}$ liefert

$$\int e^{-ax^2}dx = [xe^{-ax^2}]_{-\infty}^{\infty}-\int x(-2ax)e^{-ax^2}dx = 2a\int x^2e^{-ax^2}dx.$$

Also ist

$$df(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}2a\int x^2e^{-ax^2}dx-\sqrt{a}\int x^2e^{-ax^2}dx = 0.$$

Also ist f konstant. Aus dem ersten Aufgabenteil wissen wir, dass für $a\in\mathbb{R}_{>0}$ gilt $f(a)=\sqrt{a}\int e^{-ax^2}dx = \sqrt{a}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\pi}$. Also gilt für alle $a\in\mathbb{C}$ mit positiven Realteil, dass

$\sqrt{a}\int e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi}$ und die Aussage folgt.

Es bleibt also zu zeigen, dass $d\sqrt{\cdot}_a(z) = \frac{z}{2\sqrt{a}}$. Dazu betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto w^2$. Falls $w \neq 0$, ist $df(w) = 2w \neq 0$ und nach dem lokalen Umkehrsatz existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} = \sqrt{\cdot}$ mit Ableitung $df^{-1}(w) = df(f^{-1}(w))^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$.

c) Die allgemeine Fall folgt aus

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx\right) = 0,$$

denn dann gilt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \overset{t=0\ \&\ \text{Teil b)}}{=} e^0\int e^{-ax^2}dx \overset{t=1}{=} e^{\frac{b^2}{4a}}\int e^{-ax^2+bx}dx.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx\right) &= -2t\frac{b^2}{4a}e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx + e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\frac{d}{dt}\int e^{-ax^2+btx}dx\\ &= -2t\frac{b^2}{4a}e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx + e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int bxe^{-ax^2+btx}dx,\end{aligned}$$

wobei man leicht prüft, dass die Voraussetzungen für die Vertauschung von Integral und Ableitung erfüllt sind.

Ferner gilt wegen $\frac{d}{dx}e^{-ax^2+btx} = -2axe^{-ax^2+btx} + bte^{-ax^2+btx}$, d.h.

$$0 = \lim x \to \infty\left(e^{-ax^2+btx} - e^{-a(-x)^2-btx}\right) = -2a\int xe - ax^2 + btxdx + bt\int e^{-ax^2+btx}dx$$

woraus $\int xe^{-ax^2+btx}dx = \frac{bt}{2a}\int e^{-ax^2+btx}dx$ folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx\right) &= -2t\frac{b^2}{4a}e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx + e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int bxe^{-ax^2+btx}dx\\ &= -t\frac{b^2}{2a}e^{\frac{b^2t^2}{4a}}\int e^{-ax^2+btx}dx + b\frac{bt}{2a}\int e^{-ax^2+btx}dx = 0.\end{aligned}$$

7.3 Beispiel einer divergenten asymptotischen Reihe. Es sei

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-\alpha x^4}\, dx = \int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k x^{4k}e^{-x^2}\, dx.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist auf $\mathbb{R}^+$ glatt.

(b) Für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k x^{4k}e^{-x^2}\right|\, dx = \infty$$

(c) Für alle $\alpha > 0$ divergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k\int_{\mathbb{R}} x^{4k}e^{-x^2}\, dx$$

über $\mathbb{R}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx - f(\alpha) = O(\alpha^{n+1}) \quad \text{für } \alpha \downarrow 0.$$

Lösung

(a) Die Argumentation in Aufgabe 7.1 zeigt, dass wir Ableitung $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ und das Integral vertauschen können. Insbesondere sind alle Integrale endlich und glatt in α.

(b) Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} \right| e^{-x^2} = e^{\alpha x^4 - x^2} = e^{\alpha\left(x^2 - \frac{1}{2\alpha}\right)^2} e^{\frac{-1}{4\alpha^2}}$$

stetig und unbeschränkt in x, $\forall \alpha > 0$.

(c) Wir zeigen zunächst $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ und $\int_{\mathbb{R}} x^{2m+1} e^{-x^2/2}\, dx = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Die zweite Gleichung folgt, da mit über eine ungerade Funktion integrieren. Die erste Gleichung folgt z. B. mit Induktion. Der Induktionsanfang[1] ist klar, $m \to m+1$ folgt mit partieller Integration und $x^m e^{-x^2} \to 0$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2m} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2m+2}}{2m+1} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2(m+1)} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{(2m)!}{2^m m!} \cdot (2m+1) = \frac{(2(m+1))!}{2^{m+1}(m+1)!}.$$

Damit ergibt sich nach Substitution $x \to \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx = \frac{(-1)^k}{k!} \sqrt{2}^{-4k-1} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{k!} 2^{-2k} \alpha^k \frac{(4k)!}{2^{2k}(2k)!}.$$

Nach Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} \frac{(k!) 2^{4k} (2k)! \alpha^{k+1} (4k+4)!}{(k+1)! 2^{4k+4} (2k+2)! \alpha^k (4k)!} &= \frac{\alpha(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)}{(k+1) 2^4 (2k+2) \cdot (2k+1)} \\ &= \frac{\alpha(4k+3)(4k+1)}{4(k+1)} \geq \alpha k \end{aligned}$$

folgt Divergenz für alle $\alpha > 0$.

(d) Man nutze die Standardabschätzung der Exponentialfunktion: $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right| \leq \frac{2|y|^{n+1}}{n+1}$ für $|y| < 1 + \frac{n}{2}$. Sei n fest und $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : |\alpha x^4| < \frac{2+n}{2}\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} - e^{-x^2 - \alpha x^4} \right| dx &\leq \int_{\Omega_\alpha} \frac{2 e^{-x^2} |\alpha|^{n+1} |x|^{4n+4}}{n+1}\, dx \\ &\leq |\alpha|^{n+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{2 e^{-x^2} |x|^{4n+4}}{n+1}\, dx}_{<\infty}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man dominierte Konvergenz auf die Folge

$$f_\alpha := 1_{\Omega_\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} - e^{-x^2-\alpha x^4} \right)$$

anwenden. Es folgt die Behauptung.

7.4 Vererbung der σ-Endlichkeit auf Summen. Es seien μ und ν zwei σ-endliche Maße auf einem gemeinsamen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mu + \nu$ ein σ-endliches Maß ist. Insbesondere kann man für μ und ν die gleiche Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aussage 2. in Übung 1.168 wählen.

Lösung

Seien A_n, B_n mit $\Omega = \cup_n A_n = \cup_n B_n$ und $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$. Definiere

$$C_{k,l} := A_k \cap \left(\cup_{i=1}^{l} B_i\right).$$

Dann gilt $C_{k,l} \subset A_k$ und $C_{k,l} \subset \cup_{i=1}^{l} B_i$ und folglich $\mu(C_{k,l}) \leq \mu(A_k) < \infty$ und $\nu(C_{k,l} \leq \sum_{i=1}^{l} \nu(B_i) < \infty$. Ferner ist

$$\cup_{k,l=1}^{\infty} C_{k,l} = \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{l=1}^{\infty} A_k \cap \left(\cup_{i=1}^{l} B_i\right) = \cup_k A_k = \Omega.$$