Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 7
21.11.2013

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

7.1 Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^4+tx^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^4+tx^2}\,dx.$$

7.2 Gaußsches Integral im Komplexen. Es gilt für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\exp\frac{b^2}{4a},} \tag{1}$$

wobei $\sqrt{a}$ den Hauptwert der Quadratwurzel bezeichnet, also diejenige komplexe Zahl $w = \sqrt{a}$ mit $\operatorname{Re} w > 0$ und $w^2 = a$. In dieser Aufgabe dürfen Sie die erst später bewiesene Formel (21), Skript[1], voraussetzen.

(a) Zeigen Sie die Formel (1) zuerst im Spezialfall $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Verwenden Sie dazu eine quadratische Ergänzung, Translation und Skalierung.

(b)$*$ Zeigen Sie die Formel (1) dann im Spezialfall $b = 0$. Beweisen Sie hierzu, dass für die Funktion

$$f : \{a \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} a > 0\} \to \mathbb{C}, \quad f(a) = \sqrt{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx$$

gilt: $df = 0$. Begründen und verwenden Sie hierbei

$$d\sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,da,$$

(zu lesen als $d\sqrt{\cdot}_a(z) = z/(2\sqrt{a})$ für $a, z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a > 0$), zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen, angewandt auf die Gleichung $w^2 = a$ für $w = \sqrt{a}$. Vertauschen Sie Integral und Ableitung mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und integrieren Sie geeignet partiell.

(c) Zeigen Sie schließlich die Formel (1) allgemein, indem Sie

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(-\frac{(bt)^2}{4a}\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+btx}\,dx\right] = 0$$

für $t \in \mathbb{R}$ zeigen. Lassen Sie sich dabei vom Beweis des Beispiels 1.153 (Skript) inspirieren.

[1] $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

7.3 Beispiel einer divergenten asymptotischen Reihe. Es sei

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-\alpha x^4}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2}\, dx.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist auf $\mathbb{R}^+$ glatt.

(b) Für alle $\alpha > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k x^{4k} e^{-x^2} \right| dx = \infty$$

(c) Für alle $\alpha > 0$ divergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx$$

über $\mathbb{R}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \alpha^k \int_{\mathbb{R}} x^{4k} e^{-x^2}\, dx - f(\alpha) = O(\alpha^{n+1}) \qquad \text{für } \alpha \downarrow 0.$$

7.4 Vererbung der σ-Endlichkeit auf Summen. Es seien μ und ν zwei σ-endliche Maße auf einem gemeinsamen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mu + \nu$ ein σ-endliches Maß ist. Insbesondere kann man für μ und ν die gleiche Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aussage 2. in Übung 1.168 wählen.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 02.12.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 7

T7.1 Stetigkeit der Fouriertransformierten endlicher Maße. Es sei μ ein endliches Maß über $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \hat{\mu}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k,x\rangle}\, \mu(dx)$$

eine stetige Funktion ist.
Hinweis: Zeigen Sie Folgenstetigkeit von $\hat{\mu}$ mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz.

T7.2 Fourierreihen als Fouriertransformierte. Es sei $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$, und $\hat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dessen Fouriertransformierte. Überzeugen Sie sich davon, dass μ ein endliches Maß ist und dass $\hat{\mu}$ die Fourierreihe zu a ist.

T7.3 Die Wärmeleitungsgleichung mit $\mathcal{L}^1$-Anfangsdaten. Es sei $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|_2^2}{2t}} g(y)\, \lambda_n(dy).$$

Beweisen Sie, dass f zweimal stetig differenzierbar nach x und stetig differenzierbar nach t ist, und dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta f,$$

wobei sich der Laplaceoperator nur auf die x-Koordinaten bezieht.

T7.4 Berechnung von Erwartungswerten.

(a) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine abzählbare Menge und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (I, \mathcal{P}(I))$ eine Zufallsvariable. Es sei $p = (p_x)_{x\in I}$ die Zähldichte der Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$E_\mu(f(X)) = \sum_{x\in I} f(x)p_x,$$

wobei damit auch gemeint ist, dass die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte Seite definiert ist. Insbesondere gilt im Fall $I \subseteq \mathbb{R}$, $f = \mathrm{id}$:

$$E_\mu(X) = \sum_{x\in I} xp_x.$$

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E_\mu(X)$ und $E_\mu(X^2)$ für eine "geometrisch verteilte" Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ mit der Verteilung

$$\mathcal{L}_\mu(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (1-p)p^n\delta_n,$$

wobei $0 < p < 1$.

(c) Wieder sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable. Es sei $\rho \in M_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine Dichte der Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$ bezüglich des Lebesguemaßes $\lambda(dx) = dx$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$E_\mu(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho(x)\, dx,$$

wobei wieder auch gemeint ist, dass die linke Seite genau dann definiert ist, wenn die rechte Seite definiert ist. Insbesondere gilt im Fall $f = \mathrm{id}$:

$$E_\mu(X) = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E_\mu(X)$ und $E_\mu(X^2)$ für eine "exponentialverteilte" Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Verteilung

$$\mathcal{L}_\mu(X)(dx) = ae^{-ax} 1_{\{x>0\}}\, dx,$$

wobei $a > 0$.

T7.5 Charakterisierungen der σ-Endlichkeit. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(a) μ ist σ-endlich.

(b) Es gibt eine Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter* Mengen $\Omega_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Es gibt eine *aufsteigende* Folge $B_n \uparrow \Omega$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{*}$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.