Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 6
14.11.2013

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

6.1 Quantilsfunktionen. Es sei $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ eine streng monoton steigende stetige Funktion mit $F(x) \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ und $F(x) \stackrel{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ und $X = F^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$ ihre Umkehrfunktion. Weiter sei μ die Einschränkung des Lebesguemaßes auf $\mathcal{B}(]0,1[)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung $\mathcal{L}_\mu(X)$ von X auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Verteilungfunktion F besitzt.

6.2ε Integral mit dem Dirac-Maß = Auswertungsfunktional. Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $a \in \Omega$, δ_a das Dirac-Maß in a, und $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie

$$\int f \, d\delta_a = f(a).$$

6.3 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$, versehen mit dem Lebesguemaß $\hat{\lambda}$ auf der Lebesgueschen σ-Algebra $\hat{\mathcal{A}}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}_0$

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} | \; 2^n x - \lfloor 2^n x \rfloor \in [0, 2^{-n}]\},$$

wobei $\lfloor y \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} | \; z \leq y\}$, sowie rekursiv

$$B_0 = \emptyset, \quad B_{n+1} = A_n \Delta B_n$$

und schließlich

$$C := \liminf_{n\to\infty} B_n, \quad D := \limsup_{n\to\infty} B_n.$$

Zeigen Sie:

(a) $C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Es gilt $x \in C \Leftrightarrow x \in D$ für $\hat{\lambda}$-fast alle $x \in \mathbb{R}$

(c)∗ Ist $E \subseteq \Omega$ eine Menge mit $x \in C \Leftrightarrow x \in E$ für $\hat{\lambda}$-fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist E dicht in $\mathbb{R}$ und besitzt leeres Inneres.

(d)∗ Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = 1_C(x)$ für $\hat{\lambda}$-fast alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f auf keinem Intervall $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ Riemann-integrierbar.

(e)∗ Berechnen Sie $\int_{[0,1]} 1_C \, d\hat{\lambda}$.
(Im Ergebnis darf z.B. ein unendliches Produkt stehen.)

6.4 Inklusions-Exklusions-Formel. Es sei μ ein endliches Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse.

(a) Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{I:\, \emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \tag{1}$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Gleichung

$$1 - 1_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i}).$$

Multiplizieren Sie die rechte Seite dieser Gleichung aus und integrieren Sie dann über μ.

(b)ε Was erhält man aus der Inklusions-Exklusions-Formel (1) in den Spezialfällen $n = 2$ und $n = 3$? Vergleichen Sie mit den Teilaufgaben 1. und 4. der Übung 1.11.

6.5 Riemann-Integral als Spezialfall des Lebesgue-Integrals. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $\hat{\mathcal{A}}$ die Lebesguesche σ-Algebra (= Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra bezüglich des Lebesguemaßes) darüber und $\hat{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\hat{\mathcal{A}}$. Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt $f \in M([a, b], \hat{\mathcal{A}})$ und

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x)\, \hat{\lambda}(dx)}_{\text{Lebesgue-Integral}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{Riemann-Integral}} .$$

Das Riemann-Integral stimmt also nicht nur auf stetigen Funktionen, sondern auch auf Riemann-integrierbaren Funktionen mit dem Lebesgue-Integral überein, wenn man die Lebesguesche σ-Algebra statt der Borelschen σ-Algebra verwendet. Dies gilt selbst dann, wenn f nicht Borel-messbar ist.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 25.11.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 6

T6.1 Skalierung des Lebesguemaßes. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $S_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $S_a(x) = ax$ die Skalierungsabbildung mit a. Weiter sei λ_n das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie

$$S_a[\lambda_n] = |a|^{-n}\lambda_n \qquad \text{für } a \neq 0$$

und $S_0[\lambda_n] = \infty \cdot \delta_0$, wobei δ_0 das Diracmaß in 0 bezeichnet.

T6.2 Permutationsinvarianz des Lebesguemaßes. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Permutation, also eine Bijektion. Weiter sei $f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_\sigma((x_i)_{i=1,\dots,n}) = (x_{\sigma(i)})_{i=1,\dots,n}$. Zeigen Sie, dass f_σ Borel-meßbar ist und dass $f_\sigma[\lambda_n] = \lambda_n$ gilt.

T6.3 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C})$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und dass die Integralabbildung $I : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f \, d\mu$ $\mathbb{C}$-linear ist.

T6.4 Linearität des Integrals im Integrator.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\alpha \geq 0$. Weiter sei $f \in \overline{M}(\Omega, \mathcal{A})$, und es existiere $\int f \, d\mu$. Beweisen Sie, dass dann auch $\int f \, d(\alpha\mu)$ existiert, und dass $\int f \, d(\alpha\mu) = \alpha \int f \, d\mu$ gilt. Hierbei sei $\alpha\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $(\alpha\mu)(A) = \alpha(\mu(A))$.

(b) Nun sei ν ein weiteres Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, und es existiere auch $\int f \, d\nu$ sowie $\int f \, d\mu + \int f \, d\nu$. Zeigen Sie, dass dann auch $\int f \, d(\mu + \nu)$ existiert, und dass $\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu$ gilt.

Hinweis: Maßtheoretische Induktion.

T6.5 Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \, d1_{[a,\infty[}(x)$$

für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$\ast$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.