Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 5
07.11.2013

Übungen zur Analysis 3

Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

5.1 Messbarkeit monotoner Funktionen. Es seien $\Omega, \Omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f : \Omega \to \Omega'$ eine monoton steigende Funktion. Beweisen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \to (\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ messbar ist.

5.2 Variante des Satzes über monotone Klassen. Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$ und $M \subseteq [0, \infty]^\Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $1_A \in M$.

(b) Für alle $A \subseteq \Omega$ mit $1_A \in M$ gilt $1_{A^c} \in M$.

(c) Für alle $f, g \in M$ und alle $\alpha \in [0, \infty[$ gilt $f + g \in M$ und $\alpha f \in M$.

(d) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtnegative aufsteigende Folge mit Werten in M und ist $f : \Omega \to [0, \infty]$ mit $f_n \uparrow f$, so ist $f \in M$.

Zeigen Sie, dass dann $\overline{M}_+(\Omega, \mathcal{A}) \subseteq M$ gilt.

5.3 Von einer Abbildung erzeugte σ-Algebra.

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Wir definieren

$$\sigma(X) := \{X^{-1}[A'] |\ A' \in \mathcal{A}'\}.$$

Das Mengensystem $\sigma(X)$ wird die von X erzeugte σ-Algebra genannt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ in der Tat eine σ-Algebra ist.

(b)ε Zeigen Sie, dass $\sigma(X) \subseteq \mathcal{A}$ äquivalent zur $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-Messbarkeit von X ist.

5.4 Faktorisierung messbarer Abbildungen. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Abbildungen mit $\mathcal{A} = \sigma(Y)$. Zeigen Sie, dass es eine messbare Abbildung $Z : (\Omega', \mathcal{A}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $X = Z \circ Y$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X eine Indikatorfunktion ist. Approximieren Sie im allgemeinen Fall X durch Treppenfunktionen.

5.5ε Bildmaß unter der Komposition von Abbildungen. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Räume, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ und $g : (\Omega', \mathcal{A}') \to (\Omega'', \mathcal{A}'')$ messbare Abbildungen und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie $g[f[\mu]] = (g \circ f)[\mu]$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 18.11.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 5

T5.1 Alternative Darstellungen des äußeren Maßes. Gegeben sei ein von unten σ-stetiger Inhalt μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einer Menge Ω und das zugehörige äußere Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$. Zeigen Sie:

$$\mu^*(A) =$$
$$\inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\} =$$
$$\inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarw. disjunkter Mengen in } \mathcal{A} \text{ mit } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq A \right\}.$$

T5.2 Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zwei σ-Algebren darüber. Beweisen Sie, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathrm{id} : \Omega \to \Omega$, $\mathrm{id}(\omega) = \omega$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar.

(b) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

T5.3 Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, $B \in \mathcal{A}'$, $\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{A}' \mid C \subseteq B\}$ und $f : \Omega \to B$. Zeigen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (B, \mathcal{B})$ genau dann messbar ist, wenn $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ messbar ist.

T5.4 Messbarkeit der Kehrwertbildung.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 1/x$ für $x \neq 0$, $k(0)$ beliebig, Borel-messbar ist.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{\varepsilon}$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$\boldsymbol{*}$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.