

Übungen zur Analysis 3 Lösung

4.1ε Abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Es sei μ ein Maß. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von μ -Nullmengen wieder eine μ -Nullmenge ist.

Lösung

Dies folgt unmittelbar aus der Subadditivität von Maßen, denn für Nullmengen $N_i, i \in \mathbb{N}$ und $B_i \supset N_i$ mit $\mu(B_i) = 0$ gilt $\cup_i B_i \supset \cup_i N_i$ und

$$\mu(\cup_i B_i) \leq \sum_i \mu(B_i) = \sum_i 0 = 0.$$

4.2 Vervollständigung von Maßräumen.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und die σ -Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ und das Maß $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \rightarrow [0, \infty]$ hieraus wie im Fortsetzungssatz von Carathéodory konstruiert. Weiter sei

$$\hat{\mathcal{A}} := \{A \Delta N \mid A \in \mathcal{A}, N \subseteq \Omega, N \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge}\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ -Algebra über Ω .
- (b) $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.
- (c) Die Einschränkung von $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$ ist vollständig.
- (d) $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_\mu$, falls μ endlich ist.
- (e) Zeigen Sie an Hand des Gegenbeispiels $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = \infty$, dass $\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{A}}_\mu$ möglich ist.

Der Maßraum $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu}|_{\hat{\mathcal{A}}})$ wird *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genannt.

Lösung

Bemerkung. Sei $N \subset B$ eine Nullmenge, $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$. Dann ist $A \Delta N = (A \setminus B \cup ((A \cap B) \setminus N)) \cup N \setminus A \in \hat{\mathcal{A}}$ und $A \setminus B \in \mathcal{A}$, $(A \cap B) \setminus N \cup N \setminus A \subset B$ eine Nullmenge. Umkehrt lässt sich für $A' \in \mathcal{A}$, $N' \subset B'$ Nullmenge, jedes $A' \cup N'$ schreiben als $A' \Delta N$ mit $N = (A')^c \cap N'$ Nullmenge. D. h. $\hat{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}, N \text{ Nullmenge}\}$.

- (a) $\emptyset \in \hat{\mathcal{A}}$ ist klar. Für $A \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$, $N \subset B$ Nullmenge, ist auch $(A \cup N)^c = ((A \cup B) \setminus (A^c \cap B \setminus N))^c = (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B \setminus N) \in \hat{\mathcal{A}}$. Schließlich ist mit 4.1 auch die abzählbare Vereinigung von Elementen in $\hat{\mathcal{A}}$ wieder in $\hat{\mathcal{A}}$.

- (b) Da $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra ist und nach dem Satz von Carathéodory $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}_\mu$ sowie alle Nullmengen in $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ enthalten sind, ist auch $A \cup N \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ für $A \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$ beliebig.
- (c) Sei $N \subset M \in \hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mu}(M) = 0$, dann ist nach 1.57.5 $N \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$ und nach 1.57.6 gibt es $B, N' \in \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$: $N \subset B$, $\hat{\mu}(B) < \infty$, $\hat{\mu}(N') = 0$, $B \setminus N \subset N'$. Es folgt sofort $N = B \setminus (B \setminus N)$ mit $B \setminus N = \emptyset \cup (B \setminus N) \in \hat{\mathcal{A}}$ μ -Nullmenge, also $N \in \hat{\mathcal{A}}$.
- (d) Analog zu (c) folgt mit 1.57.6 aus $A \in \hat{\mathcal{A}}_\mu$, $\hat{\mu}(A) = \mu^*(A) < \infty$ bereits $A \in \hat{\mathcal{A}}$.¹
- (e) Es ist $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, da die einzige Nullmenge $\emptyset$ ist. Aber wegen $\mu^*(\{0\}) = \mu^*(\{1\}) = \infty$ ist $\hat{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{P}(\Omega)$.

4.3* Regularität der Lebesgue-Stieltjes-Maße. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und rechtsstetig und $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \rightarrow [0, \infty]$ das zugehörige (vollständige) Lebesgue-Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}_f(A) < \infty$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq A \subseteq B$ und $\hat{\mu}_f(B) - \epsilon < \hat{\mu}_f(A) < \hat{\mu}_f(K) + \epsilon$. (Eine analoge Aussage gilt auch für das n -dimensionale Lebesguemaß.)

Lassen Sie sich dabei durch Ideen aus dem Beweis des Carathéodoryschen Fortsetzungssatzes motivieren.

Lösung

Sei $\epsilon > 0$ und zunächst $A = (a, b]$ ein halboffenes Intervall. Da f rechtsstetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(a + \delta) - f(a) < \epsilon$ und $f(b + \delta) - f(b) < \epsilon$. Wähle $K = [a + \delta, b]$ und $B = (a, b + \delta)$. Da $\hat{\mu}_f$ auf der von den halboffenen Intervallen erzeugten Mengenalgebra $\mathcal{A}$ mit μ_f übereinstimmt, gilt

$$\hat{\mu}_f(B) - \hat{\mu}_f(A) = (f(b + \delta) - f(a)) - (f(b) - f(a)) = f(b + \delta) - f(b) < \epsilon$$

und analog

$$\hat{\mu}_f(A) - \hat{\mu}_f(K) = (f(b) - f(a)) - (f(b) - f(a + \delta)) = f(a + \delta) - f(a) < \epsilon.$$

Also ist $\hat{\mu}_f$ regulär auf den halboffenen Intervallen.

Da wir jede endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen bereits als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle schreiben können, folgt, dass $\hat{\mu}_f$ auch auf $\mathcal{A}$ regulär ist, denn: Sei $A = \coprod_{i=1}^k (a_i, b_i]$ und $K_i \subset (a_i, b_i] \subset B_i$ mit K_i kompakt und B_i offen und

$$\hat{\mu}_f((a_i, b_i]) - \hat{\mu}_f(K_i) < \frac{\epsilon}{k}, \quad \hat{\mu}_f(B_i) - \hat{\mu}_f((a_i, b_i]) < \frac{\epsilon}{k}.$$

Dann ist $K := \cup_i K_i$ als endliche Vereinigung von Kompakta wieder kompakt und $B := \cup_i B_i$ wieder offen. Ferner gilt sind die K_i nach Voraussetzung paarweise disjunkt (denn die Intervalle $(a_i, b_i]$ sind paarweise disjunkt) und damit gilt

$$\hat{\mu}_f(A) - \hat{\mu}_f(K) = \sum_{i=1}^k (\hat{\mu}_f((a_i, b_i]) - \hat{\mu}_f(K_i)) < k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

¹ μ endlich impliziert μ^* endlich nach Definition von μ^* .

Analog gilt

$$\hat{\mu}_f(B) - \hat{\mu}_f(A) \leq \sum_{i=1}^k (\hat{\mu}_f(B_i) - \hat{\mu}_f((a_i, b_i])) < \epsilon.$$

Die Behauptung der Aufgabe folgt nun aus

Lemma: Sei μ ein regulärer σ -stetiger Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ über einem topologischen Raum Ω . Dann ist auch das zugehörige äußere Maß μ^* auf $\mathcal{P}(\Omega)$ regulär.

Beweis: Seien $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben und seien $A_i \in \mathcal{A}$ eine aufsteigende Kette mit $A \subset \cup_i A_i$ und $\lim_i \mu(A_i) - \mu^*(A) < \epsilon/3$. Aufgrund der Regularität von μ auf $\mathcal{A}$ existieren zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine kompakte Menge $K_i \subset A_i$ und eine offene Menge $B_i \supset A_i$ mit

$$\mu(A_i) - \mu(K_i) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \mu(B_i) - \mu(A_i) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sei nun $I \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt, so dass $\lim_i \mu(A_i) - \mu(A_I) < \epsilon/3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(A) - \mu(K_I) &\leq |\mu^*(A) - \lim_i \mu(A_i)| + |\lim_i \mu(A_i) - \mu(A_I)| + |\mu(A_I) - \mu(K_I)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $K := K_I$ eine kompakte Menge mit der gewünschten Eigenschaft.

Setze nun $B := \cup_i B_i$. Dann ist $A \subset B$ wieder offen (aber nicht notwendig $B \in \mathcal{A}$) und $B_i \uparrow B$ und aufgrund der σ -Stetigkeit von μ^* gilt $\mu^*(B) = \lim_i \mu(B_i)$. Wähle nun $I \in I$ so groß, dass auch $\mu^*(B) - \mu(B_I) < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu^*(B) - \mu^*(A) &= \lim_i \mu^*(B_i) - \mu^*(A) \\ &\leq |\lim_i \mu(B_i) - \mu(B_I)| + |\mu(B_I) - \mu(A_I)| + |\mu(A_I) - \mu^*(A)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist B eine offene Menge mit der gewünschten Eigenschaft. □

4.4ε Es sei $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$. Berechnen Sie $f^{-1}[\{5, 6\}]$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$?

Lösung

Es ist $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{2, 3\}$ und f ist weder in- noch surjektiv.

4.5 Verträglichkeit der Urbildabbildung mit Mengenoperationen. Es sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, $A, B \subseteq \Omega'$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Ω' . Zeigen Sie:

- (a)ε $f^{-1}[\Omega'] = \Omega$,
- (b) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
- (c)ε Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$,
- (d) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,
- (e)ε $f^{-1}[\Omega' \setminus B] = \Omega \setminus f^{-1}[B]$,
- (f) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$, falls $I \neq \emptyset$.

Im Gegensatz zur Urbildabbildung verträgt sich die Bildung des Bildes nicht so gut mit Mengenoperationen. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $f[C \setminus D] \neq f[C] \setminus f[D]$ möglich ist.

Lösung

(a) ist klar, denn $\Omega \subset f^{-1}[\Omega']$ wegen $f(\Omega) \subset \Omega'$ und wegen $f^{-1}[\Omega'] \subset \Omega$ folgt Gleichheit.

(b)

$$x \in f^{-1}[A \cup B] \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ oder } f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B].$$

(c) Angenommen $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, dann wäre $f(x) \in A \cap B = \emptyset$. Widerspruch.

(d)

$$x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ und } f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[A \setminus B].$$

(e)

$$x \in \Omega \setminus f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \Omega' \setminus B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Omega' \setminus B].$$

(f)

$$x \in \cap_{i \in I} f^{-1}[A_i] \Leftrightarrow f(x) \in A_i \forall i \in I \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\cap_{i \in I} A_i].$$

Für $f: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ und $C = \{1\}, D = \{2\}$ gilt offensichtlich $f[C \setminus D] = \{1\}$, aber $f[C] \setminus f[D] = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$.