MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 4
31.10.2013

# Übungen zur Analysis 3

*Bitte markieren Sie auf Ihrer Lösung* **zwei Aufgaben**, *die bevorzugt korrigiert werden sollen.*

**4.1ε Abzählbare Vereinigung von Nullmengen.** Es sei $\mu$ ein Maß. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von $\mu$-Nullmengen wieder eine $\mu$-Nullmenge ist.

**4.2 Vervollständigung von Maßräumen.**

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und die $\sigma$-Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ und das Maß $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \to [0, \infty]$ hieraus wie im Fortsetzungssatz von Carathéodory konstruiert. Weiter sei

$$\hat{\mathcal{A}} := \{A \Delta N |\ A \in \mathcal{A},\ N \subseteq \Omega,\ N \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$.

(b) $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.

(c) Die Einschränkung von $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$ ist vollständig.

(d) $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_\mu$, falls $\mu$ endlich ist.

(e) Zeigen Sie an Hand des Gegenbeispiels $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = \infty$, dass $\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{A}}_\mu$ möglich ist.

Der Maßraum $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu}|_{\hat{\mathcal{A}}})$ wird *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genannt.

**4.3∗ Regularität der Lebesgue-Stieltjes-Maße.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und rechtsstetig und $\hat{\mu}_f : \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f} \to [0, \infty]$ das zugehörige (vollständige) Lebesgue-Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \hat{\mathcal{A}}_{\mu_f}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\hat{\mu}_f(A) < \infty$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ und eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ mit $K \subseteq A \subseteq B$ und $\hat{\mu}_f(B) - \epsilon < \hat{\mu}_f(A) < \hat{\mu}_f(K) + \epsilon$. (Eine analoge Aussage gilt auch für das $n$-dimensionale Lebesguemaß.)
*Lassen Sie sich dabei durch Ideen aus dem Beweis des Carathéodoryschen Fortsetzungssatzes motivieren.*

**4.4ε** Es sei $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$. Berechnen Sie $f^{-1}[\{5, 6\}]$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3\}$?

**4.5 Verträglichkeit der Urbildabbildung mit Mengenoperationen.** Es sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, $A, B \subseteq \Omega'$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $\Omega'$. Zeigen Sie:

(a)ε $f^{-1}[\Omega'] = \Omega$,

(b) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,

(c)ε Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$,

(d) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$,

(e)$\varepsilon$ $f^{-1}[\Omega' \setminus B] = \Omega \setminus f^{-1}[B]$,

(f) $f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$, falls $I \neq \emptyset$.

Im Gegensatz zur Urbildabbildung verträgt sich die Bildung des Bildes nicht so gut mit Mengenoperationen. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $f[C \setminus D] \neq f[C] \setminus f[D]$ möglich ist.

**Abgabe:** Bis spätestens Montag, den 11.11.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

# Präsenzaufgaben zu Blatt 4

**T4.1** Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\delta_a$ das Dirac-Maß in einem Punkt $a \in \Omega$ mit $\{a\} \in \mathcal{A}$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_a)$ durch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_a)$ gegeben wird, wobei wir das Dirac-Maß auf dem vergrößerten Definitionsbereich $\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}$ wieder mit $\delta_a$ bezeichnen.

**T4.2** **Verträglichkeit der Urbildabbildung mit Mengenoperationen.** Es sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, $A, B \subseteq \Omega'$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $\Omega'$. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$,

(b) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$,

(c) $f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$,

Im Gegensatz zur Urbildabbildung verträgt sich die Bildung des Bildes nicht so gut mit Mengenoperationen. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $f[C \cap D] \neq f[C] \cap f[D]$ möglich ist.

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „$\varepsilon$“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „$*$“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.