Übungen zur Analysis 3

3.1ε Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit seiner Potenzmenge und der Gleichverteilung μ . Weiter sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1, 4\}\}$. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{E}$ ist *nicht* $\cap$ -stabil.
- (b) $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.
- (c) $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ sind *nicht* bezüglich μ voneinander unabhängig.

Lösung

(a) Denn $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\} \notin \mathcal{E}$.

(b) Wir berechnen: $\mu(\{1, 2\} \cap \{1, 4\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \mu(\{1, 2\})\mu(\{1, 4\})$ und analog $\mu(\{1, 3\} \cap \{1, 4\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{4} = \mu(\{1, 3\})\mu(\{1, 4\})$.

(c) Wir haben bereits gesehen, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$. Insbesondere ist also $\{1, 4\} \in \sigma(\mathcal{E})$, aber es gilt $\frac{1}{2} = \mu(\{1, 4\}) = \mu(\{1, 4\} \cap \{1, 4\}) \neq \mu(\{1, 4\})^2 = \frac{1}{4}$.

3.2 Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ , wenn gilt:

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n : \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

- (a) Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ , so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \dots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.
- (b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Aussage von oben falsch werden kann, wenn wir auf die Voraussetzung " $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$ " oben verzichtet hätten. Versehen Sie dazu $\Omega = \{1, 2\}$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß und betrachten Sie $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$.
- (c) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{A}$ voneinander bzgl. μ unabhängige Unter- σ -Algebren von $\mathcal{A}$, so sind auch $\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ und $\sigma(\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4)$ voneinander unabhängig bzgl. μ .

Lösung

- (a) Wir folgen dem Beweis von 1.43. Man stelle zunächst fest, dass für $\Omega \in \mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq n$ aus der Unabhängigkeit von $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq n$ auch schon die Unabhängigkeit jeder Teilfamilie $J \subset I := \{1, \dots, n\}$ folgt indem man $A_k := \Omega$ für $k \in I \setminus J$ in unsere Gleichung einsetzt. Die Umkehrung ist trivial.
Sei jetzt $J \subset I$ mit $|J| = k$ und

$$A_i \in \begin{cases} \sigma(\mathcal{E}_i), & i \in J, \\ \mathcal{E}_i, & i \in I \setminus J \end{cases} .$$

Wir zeigen induktiv über die Anzahl $|J| = k$, dass $\mu(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i)$. Für $k = 0$ erhalten wir unsere Voraussetzung. Seien nun $|J| = k$ und $J' = J \cup \{j\}$, $|J'| = k + 1 \leq n$ und

$$A_i \in \begin{cases} \sigma(\mathcal{E}_i), & i \in J, \\ \mathcal{E}_i, & i \in I \setminus J' \end{cases} \quad (3.2)$$

sowie $\mu_j : A_j \mapsto \mu(\bigcap_{i \in I} A_i)$, $\nu_j : A_j \mapsto \prod_{i \in I} \mu(A_i)$ zwei Maße. Wie im Beweis zu 1.43 sei $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \mu_j(A) = \nu_j(A) \text{ für alle } i \neq j : A_i \text{ wie in (3.2)}\}$ unser Dynkin-System. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathcal{E}_j \subset \mathcal{D}$ und nach dem Dynkin-Lemma auch $\sigma(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{D}$. Das schließt die Induktion ab.

- (b) Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$, $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$ und $\mu(\{1\}) := \frac{1}{2}$ unser Wahrscheinlichkeitsmaß. Es folgt $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\sigma(\mathcal{E}_3) = \{\emptyset, \Omega\}$, sowie $\mu(\{1\} \cap \{1\} \cap \Omega) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.
- (c) $\mathcal{E}_{ij} := \{A_i \cap A_j | A_i \in \mathcal{E}_i, A_j \in \mathcal{E}_j\}$ ist $\cap$ -stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_j)$: Durchschnittsstabilität ist klar. Wegen $\Omega \in \mathcal{E}_j$ gilt $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}_{ij}$, $\forall j$. Weiter ist auch $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j \subset \mathcal{E}_{ij}$. Es folgt $\sigma(\mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_j) = \sigma(\mathcal{E}_{ij})$.
Ist $\{1, 2, 3, 4\} =: I = J \cup \tilde{J}$ eine disjunkte Zerlegung, dann sind $\mathcal{E}_{ij}$, $i, j \in J$ und $\mathcal{E}_{kl}$, $k, l \in \tilde{J}$ unabhängig, denn für $A_{ij} = A_i \cap A_j \in \mathcal{E}_{ij}$, $A_{kl} = A_k \cap A_l \in \mathcal{E}_{kl}$ gilt

$$\mu(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = \mu(A_i)\mu(A_j)\mu(A_k)\mu(A_l) = \mu(A_i \cap A_j)\mu(A_k \cap A_l)$$

und damit sind $\sigma(\mathcal{E}_{ij})$, $\sigma(\mathcal{E}_{kl})$ nach 1.43 unabhängig.¹ Insbesondere gilt dies für $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, $l = 4$.

3.3 Zeigen Sie folgende Umkehrung des Lemmas 1.47²:

Ist ein Inhalt σ -stetig von unten, so ist er auch σ -nullstetig.

Lösung

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$, $\mu(A_1) < \infty$ und μ σ -stetig von unten. Dann ist $B_n := A_1 \setminus A_n$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathcal{A}$ mit $B_n \uparrow A_1$ und es folgt $\infty > \mu(A_k) + \mu(B_k) = \mu(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = 0$.

¹Man beachte, dass nach dem Beweis von Teil (a) Teilsystem unabhängiger Systeme unabhängig sind.

²Nummerierung wie im Skript.

3.4 Vererbung des Kompaktheitskriteriums auf Produkte.

Für $j = 1, 2$ seien eine Mengenalgebra $\mathcal{A}_j$ auf einer Menge Ω_j , ein Inhalt $\nu_j : \mathcal{A}_j \rightarrow [0, \infty]$ und eine hausdorffsche Topologie $\mathcal{T}_j$ auf Ω gegeben, so dass das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50¹ erfüllt sei. Weiter bezeichne $\mathcal{A}$ die Produkt-Mengenalgebra von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ den Produkt-Inhalt dazu aus Übung 1.19¹ und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf Ω . Zeigen Sie, dass auch ν das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50¹ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ erfüllt.

Lösung

Wir überlegen uns zuerst, dass $\Omega_1 \times \Omega_2$ wieder ein Hausdorffraum ist. Dazu seien $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \in \Omega$. Dann ist o.E. $x_1 \neq y_1$ (für $x_1 = x_2$ und $y_1 \neq y_2$ argumentiere analog mit Ω_2) und da Ω_1 Hausdorffsch war, existieren disjunkte offene Umgebungen U_1, U_2 von x_1 bzw. x_2 . Dann sind auch $U_1 \times \Omega_2$ und $U_2 \times \Omega_2$ offene und disjunkte Umgebungen von (x_1, x_2) bzw. (y_1, y_2) . Wir zeigen nun die Aussage zuerst für Mengen der Form $A \times B$: Sei $x < \nu(A \times B) = \nu_1(A)\nu_2(B)$. Dann existieren positive x_1 und x_2 mit $x = x_1x_2$ und $x_1 < \nu_1(A), x_2 < \nu_2(B)$, sowie nach Voraussetzung kompakte Mengen $K_1 \subset A$ und $K_2 \subset B$ sowie $C_1 \in \mathcal{A}_1$ und $C_2 \in \mathcal{A}_2$ mit

$$\begin{aligned} C_1 \subset K_1 \subset A, & \quad x_1 \leq \nu_1(C_1) \\ C_2 \subset K_2 \subset B, & \quad x_2 \leq \nu_2(C_2). \end{aligned}$$

Dann ist auch $K_1 \times K_2$ kompakt in der Produkttopologie(!), $C_1 \times C_2 \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$C_1 \times C_2 \subset K_1 \times K_2 \subset A \times B, \quad x_1x_2 \leq \nu_1(C_1)\nu_2(C_2) = \nu(C_1 \times C_2).$$

Sei nun $A \in \mathcal{A}$. Nach Aufgabe 2.5. kann A als endliche disjunkte Vereinigung von "Quadern" $A_i \times B_i$ geschrieben werden. Es genügt dann die Aussage für solche Quader zu zeigen. Denn gegeben $A = \coprod_{i=1}^k A_i \times B_i$ und $x < \nu(A) = \sum_i \nu(A_i \times B_i)$, so existieren positive $x_i < \nu(A_i \times B_i)$ mit $x = x_1 + \dots + x_k$ und kompaktes $K_i \subset A$ und $C_i \in \mathcal{A}$ mit $C_i \subset K_i \subset A_i \times B_i$ und $x_i \leq \nu(C_i)$. Dann ist aber auch $K := \cup_{i=1}^k K_i$ als endliche Vereinigung von kompakten Mengen wieder kompakt, $C := \cup C_i \in \mathcal{A}$ und $C \subset K \subset A$. Die C_i sind als disjunkte Teilmengen der $A_i \times B_i$ wieder disjunkt und es gilt

$$x = \sum_i x_i \leq \sum_i \nu(C_i) = \nu\left(\coprod_i C_i\right) = \nu(C).$$