

Übungen zur Analysis 3

Aus administrativen Gründen können wir ab Blatt 3 nicht länger alle Übungsaufgaben korrigieren. Wir bitten Sie deshalb auf jedem Blatt anzugeben, welche **zwei Aufgaben** bevorzugt korrigiert werden sollen. Bitte beachten Sie, dass Sie weiterhin alle Übungsblätter (und damit alle bearbeiteten Aufgaben) mit Ihrer Klausur abgeben werden und der Prüfer diese Blätter erhält. Die Änderung hat somit nur zur Folge, dass Sie nicht mehr zu allen Ihren eingereichten Lösungen zeitnah eine Rückmeldung erhalten. Es ist deshalb empfehlenswert gerade Lösungsvorschläge, bei denen Sie sich nicht sicher sind, ob diese fehlerfrei sind, korrigieren zu lassen. Bitte beachten Sie auch, dass die angegebene Punktzahl Ihrer Selbsteinschätzung dient, auf die spätere Bewertung der Blätter durch den Prüfer aber keinen direkten Einfluss hat.

3.1ε Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, versehen mit seiner Potenzmenge und der Gleichverteilung μ . Weiter sei $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1, 4\}\}$. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{E}$ ist *nicht* $\cap$ -stabil.
- (b) $\forall A \in \mathcal{E} \forall B \in \mathcal{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.
- (c) $\sigma(\mathcal{E})$ und $\sigma(\mathcal{F})$ sind *nicht* bezüglich μ voneinander unabhängig.

3.2 Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ , wenn gilt:

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n : \mu\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

- (a) Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ , so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \dots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.
- (b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Aussage von oben falsch werden kann, wenn wir auf die Voraussetzung " $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$ " oben verzichtet hätten. Versehen Sie dazu $\Omega = \{1, 2\}$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß und betrachten Sie $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$.
- (c) Zeigen Sie: Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{A}$ voneinander bzgl. μ unabhängige Unter- σ -Algebren von $\mathcal{A}$, so sind auch $\sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$ und $\sigma(\mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4)$ voneinander unabhängig bzgl. μ .

3.3 Zeigen Sie folgende Umkehrung des Lemmas 1.47¹:

Ist ein Inhalt σ -stetig von unten, so ist er auch σ -nullstetig.

¹Nummerierung wie im Skript.

3.4 Vererbung des Kompaktheitskriteriums auf Produkte.

Für $j = 1, 2$ seien eine Mengenalgebra $\mathcal{A}_j$ auf einer Menge Ω_j , ein Inhalt $\nu_j : \mathcal{A}_j \rightarrow [0, \infty]$ und eine hausdorffsche Topologie $\mathcal{T}_j$ auf Ω gegeben, so dass das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50¹ erfüllt sei. Weiter bezeichne $\mathcal{A}$ die Produkt-Mengenalgebra von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ den Produkt-Inhalt dazu aus Übung 1.19¹ und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf Ω . Zeigen Sie, dass auch ν das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50¹ bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ erfüllt.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 04.11.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 3

T3.1 Limsup und liminf für Mengen. Für eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Mengen definiert man:

$$\limsup_j A_j := \{\omega \mid \omega \in A_j \text{ für unendlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

$$\liminf_j A_j := \{\omega \mid \omega \in A_j \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\limsup_j A_j = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq n} A_j$$

$$\liminf_j A_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq n} A_j$$

gilt. Folgern Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sind alle $A_j, j \in \mathbb{N}$, messbare Mengen darin, so sind auch $\limsup_j A_j$ und $\liminf_j A_j$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$.

T3.2 Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ messbare Räume, $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ihr kartesisches Produkt und $\pi_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, \pi_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i$ für $i = 1, \dots, n$ die kanonischen Projektionen. Beweisen Sie

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\pi_i^{-1}[A_i] \mid i \in \{1, \dots, n\}, A_i \in \mathcal{A}_i\}).$$

T3.3 Überlegen Sie sich unter den Voraussetzungen von Definition 1.54¹: $\mu^*(\emptyset) = 0$. Überlegen Sie sich auch, dass für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ gilt: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Aufgaben mit einem „T“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „ε“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „*“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.