Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 2
17.10.2013

Übungen zur Analysis 3

2.1ε (σ-)Subadditivität.

(a) Es sei μ ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(b) Nun sei μ sogar ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\mathcal{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Lösung

(a) Mit Induktionsanfang $\mu(A_1) \leq \sum_{j=1}^{1} \mu(A_j)$ und Induktionsschluss

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) + \mu(A_n) - \mu\left(A_n \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right) \overset{IV}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)^1$$

folgt die Aussage (vgl. Aufgabe 1.4).

(b) Sei $\tilde{A}_1 := A_1$ und $\tilde{A}_i := A_i \setminus \left(A_i \cap \bigcup_{j<i} \tilde{A}_j\right) \in \mathcal{A}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und die zweite Vereinigung ist disjunkt. Mit σ-Additivität und $\tilde{A}_j \subset A_j,\ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\tilde{A}_j) \leq \mu(A_j),\ \forall j \in \mathbb{N}$ folgt das Ergebnis.

2.2 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ alle die gleiche σ-Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$ erzeugen:

(a) $\mathcal{E}_1 = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle.

(b) $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.

(c) $\mathcal{E}_3 = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

(d) $\mathcal{E}_4 = \{]a, b] \cap \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$

[1] Die Rechnung gilt falls $\mu(A_i) \neq \infty,\ \forall 1 \leq i \leq n$. Der Fall $\mu(A_j) = \infty$ für eine $1 \leq j \leq n$ ist trivial.

Lösung

Lösung

Wir verwenden Aufgabe T2.2 um die Gleichheit der σ-Algebren zu zeigen. Hierfür gibt es viele Möglichkeiten. Wir zeigen folgende Inklusionen:

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_3), \mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_4), \mathcal{E}_4 \subset \sigma(\mathcal{E}_2),$$

woraus mit T2.2(b) folgt

$$\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_2),$$

also Gleichheit.

$\underline{\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)\text{:}}$ $[a, b] = (]-\infty, a[\cup]a, \infty[)^c$.

$\underline{\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)\text{:}}$ $]a, b[=]-\infty, a]^c \setminus [b, \infty[$ und $[b.\infty[= \left(\cup_{n\geq 1}]-\infty, b-\frac{1}{n}]\right)^c$

$\underline{\mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_4)\text{:}}$ $]-\infty, b] =]a, b] \cap \mathbb{R}$ mit $a = -\infty$

$\underline{\mathcal{E}_4 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)\text{:}}$

- $\underline{a, b = \pm\infty\text{:}}$ $]a, b] \cap \mathbb{R} =]-\infty, \infty[= \cup_{n\geq 1}[-n, n]$
- $\underline{a > -\infty, b = \infty\text{:}}$ $]a, b] \cap \mathbb{R} =]a, \infty[= \cup_{n\geq 1}[a, a+n] \setminus [a-1, a]$
- $\underline{a = -\infty, b < \infty\text{:}}$ $]a, b] \cap \mathbb{R} =]-\infty, b] = \cup_{n\geq 1}[b-n.b]$
- $\underline{a > -\infty, b < \infty\text{:}}$ $]a, b] \cap \mathbb{R} =]a, b] = [a, b] \setminus [a-1, a]$

2.3 Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind:

(a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}]$,

(c) die Menge A aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer "3" vorkommt,

(d) die Menge B aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung unendlich oft die Ziffer "3", aber nur endlich oft die Ziffer "4" vorkommt.

Lösung

(a) Für alle $r \in R$ ist $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ offen, also $\{r\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit ist auch $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} q$ als abzählbare Vereinigung eine Borelmenge. Als Komplement ist auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen (d. h. von Komplementen offener Mengen) ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}]$ Borelmenge.

(c) Sei $x := \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{-i}$, $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$ und $X_i := \{x \in [0, 1[| x_i = 3\}$. Es ist $X_i = \bigcup_{\substack{j=\sum_{j=1}^{i-1} a_j 10^{-j} \\ a_j \in \{0, \ldots, 9\}}} X_i^j$, $X_i^j := j+[3\cdot 10^{-i}, 4\cdot 10^{-i}[= j+[3\cdot 10^{-i}, 4\cdot 10^{-i}]\setminus\{4\cdot 10^{-i}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (vgl. Aufgabe 1.1ε). Folglich ist auch $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ Borelmenge.

(d) Sei $x := \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{-i}$, $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$ und $X(k, i) := \{x \in [0, 1[| x_j \neq k, \ \forall j > i\}$. Dann gilt $B = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(4, i)\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(3, i)\right)^c$ Borelmenge.

Bemerkung. Die Dezimaldarstellung von Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ ist nicht eindeutig, z. B. $0,2999\ldots = 0,3$. Fordert man, dass eine Zahl bzgl. jeder Darstellung eine gewisse Ziffer ($\neq 9$) enthält, dann erhalten wir z. B. in (c) X_i^j als offenes und nicht als halboffenes Intervall. Dies ist natürlich auch eine Borelmenge.

2.4 Klassifizierung von σ-Algebren auf abzählbaren Mengen. (Fortsetzung von Aufgabe 1.3)

(a) Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, $\Sigma(\Omega)$ das Mengensystem aller Σ-Algebren darüber, und $\Pi(\Omega)$ das Mengensystem aller Partitionen darüber. Beweisen Sie, dass die Abbildung part : $\Sigma(\Omega) \to \Pi(\Omega)$, $\mathcal{A} \mapsto \mathrm{part}(\mathcal{A})$ aus Übung 1.6 und die Abbildung $\sigma : \Pi(\Omega) \to \Sigma(\Omega)$, $\mathcal{E} \mapsto \sigma(\mathcal{E})$ zueinander inverse Bijektionen sind.

(b) Zählen Sie alle σ-Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ auf.

Lösung

(a) $\underline{\sigma \circ \mathrm{part}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}}$: Es ist $\sigma(\mathrm{part}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{A}$, denn $A(\omega) \in \mathcal{A}$ für alle ω und somit ist $\mathrm{part}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Aus T2.2 folgt also $\sigma(\mathrm{part}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{A}$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $B \in \mathcal{A}$. Dann gilt nach Aufgabe 1.3(d), dass $B = \cup_{\omega \in B} A(\omega)$, wobei nach Voraussetzung $A(\omega) \in \mathrm{part}(\mathcal{A})$ ist. Also ist B als Vereinigung von Elementen des Erzeugendensystems von $\sigma(\mathrm{part}(\mathcal{A}))$ ein Element von $\sigma(\mathrm{part}(\mathcal{A}))$ und damit gilt $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathrm{part}(\mathcal{A}))$.

$\underline{\mathrm{part} \circ \sigma = \mathrm{id}}$: Sei $\Omega = \coprod_i B_i$ eine Partition von Ω. Wir zeigen, dass $\{B_i\}_i \subset \mathrm{part}(\sigma(\{B_i\}_i)$, woraus bereits Gleichheit folgt, da $\{B_i\}_i$ nach Voraussetzung eine Partition von Ω war.

Setze $\mathcal{A} = \sigma(\{B_i\}_i)$. Wegen $B_k \in \sigma(\{B_i\}_i)$ gilt nach 1.3 (d) $B_k = \cup_{\omega \in B_k} A(\omega)$. Wir behaupten, dass bereits $B_k = A(\omega)$ für ein beliebiges $\omega \in B_k$ gilt. Damit folgt, dass $B_k \in \mathrm{part}(\sigma(\{B_i\}_i))$ und damit die Behauptung der Aufgabe.

Sei also $\omega \in B_k$. In Aufgabe 1.3 (b) haben wir gesehen, dass $A(\omega)$ die kleinste Menge in $\mathcal{A} = \sigma(\{B_i\}_i)$ ist, die ω enthält. Diese muss aber B_k sein, denn alle Mengen in $\sigma(\{B_i\}_i)$ entstehen durch Vereinigen, Schneiden und Komplementbilden von Mengen aus $\{B_i\}_i$. Da die B_i aber paarweise disjunkt sind, können wir auf diese Weise keine echten, nichtleeren Teilmengen von B_k bilden, denn:

Durch Schneiden, Vereinigen und Komplementbilden von Mengen aus $\{B_i\}_i$ erhalten wir stets nur Mengen B mit $B_k \subset B$ oder $B_k \cap B = \emptyset$. Wiederum durch Schneiden, Vereinigen und Komplementbilden solcher Mengen B erhalten wir wieder nur Mengen $\widetilde{B}$ mit $B_k \subset \widetilde{B}$ oder $B_k \cap \widetilde{B} = \emptyset$. Es ist also B_k die kleinste Menge in $\sigma(\{B_i\}_i)$ die $\omega \in B_k$ enthält.

(b) Nach (a) genügt es, alle Partitionen von Ω zu betrachten. Die Beobachtung, dass jeweils B_k die kleinsten Menge in $\sigma(\{BB_i\}_i)$ ist, welche die Elemente von B_k enthält, ist nützlich um die zugehörigen σ-Algebren zu berechnen.

Insgesamt gibt es 18 Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$, nämlich eine bestehend aus einer einzigen Menge, $\binom{4}{2} + \binom{4}{1} = 3 + 4 = 7$ bestehend aus zwei Mengen, $\binom{4}{2} = 4$ bestehend aus drei Mengen und eine bestehende aus vier Mengen. Die Partitionen sind

(a) $\{\Omega\}$ und die zugehörige σ-Algebra ist die triviale σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$;

(b) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,2\},\{3,4\},\Omega\}$;

(c) $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,3\},\{2,4\},\Omega\}$;

(d) $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,4\},\{2,3\},\Omega\}$;

(e) $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,2,3\},\{4\},\Omega\}$;

(f) $\{\{1,2,4\},\{3\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,2,4\},\{3\},\Omega\}$;

(g) $\{\{1,3,4\},\{2\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1,3,4\},\{2\},\Omega\}$;

(h) $\{\{2,3,4\},\{1\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1\},\{2,3,4\},\Omega\}$;

(i) $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{3\},\{4\},\{1,2\},\{4,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\Omega\}$;

(j) $\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1\},\{4\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\Omega\}$;

(k) $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4,\},\Omega\}$;

(l) $\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{2\},\{4\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\Omega\}$;

(m) $\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\Omega\}$;

(n) $\{2,4\},\{1\},\{3\}$ mit zug. σ-Algebra $\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\Omega\}$;

(o) $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ mit zug. σ-Algebra 2^Ω.

Es gibt also insgesamt 8 σ-Algebren über der Menge $\{1,2,3,4\}$.

2.5∗ Produkte von Mengenalgebren und Inhalten. Für $j=1,2$ seien Ω_j eine Menge, $\mathcal{A}_j$ eine Mengenalgebra darüber und $\mu_j:\mathcal{A}_j\to[0,\infty]$ ein Inhalt. Weiter sei $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ und $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken $A_1\times A_2$ mit Seiten $A_1\in\mathcal{A}_1$ und $A_2\in\mathcal{A}_2$. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element von $\mathcal{A}$ kann als endliche Vereinigung von *paarweise disjunkten* Rechtecken $A_1\times A_2$ mit Seiten $A_1\in\mathcal{A}_1$ und $A_2\in\mathcal{A}_2$ dargestellt werden.

(b) $\mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra über Ω.

(c) Es gibt genau einen Inhalt $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ mit $\mu(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für $A_1\in\mathcal{A}_1$ und $A_2\in\mathcal{A}_2$.

Insbesondere gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ genau einen Inhalt μ_n auf der Mengenalgebra aller endlichen Vereinigungen von Quadern $\prod_{j=1}^n]a_j,b_j]$, $a_j\le b_j$ in $[-\infty,\infty]$, mit $\mu(\prod_{j=1}^n]a_j,b_j])=\prod_{j=1}^n(b_j-a_j)$.

Lösung

Man veranschauliche sich das Vorgehen jeweils mit einer entsprechenden Zeichnung von Quadern in $\mathbb{R}^2$.

(a) Beachte $(a_1,a_2)\in A_1\cap A_2\Leftrightarrow a_1\in A_1$ und $a_2\in A_2$. Entsprechend ist $W:=(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$. Wir zeigen zunächst, dass sich $A_1\times A_2\setminus W$ in disjunkte Quader zerlegen lässt:

$$\begin{aligned}A_1\times A_2\setminus W=&(A_1\setminus(A_1\cap B_1))\times(A_2\setminus(A_2\cap B_2))\dot\cup(A_1\setminus(A_1\cap B_1))\times(A_2\cap B_2)\dot\cup\\&\dot\cup(A_1\cap B_1)\times(A_2\setminus(A_2\cap B_2)).\end{aligned}$$

Analog zerlege man $B_1 \times B_2 \setminus W$. Sei nun $\bigcup_{j=1}^n C_1^j \times C_2^j \in \mathcal{A}$ beliebig. Mit Induktion nach n (bei trivialem Induktionsanfang) ist

$$\bigcup_{j=1}^n C_1^j \times C_2^j \overset{IV}{=} C_1^n \times C_2^n \cup \coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j$$

für paarweise disjunkte $\tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j$. Aber $C_1^n \times C_2^n \cap \coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j = \coprod_{j=1}^l \left(\tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j \cap C_1^n \times C_2^n\right)$ zerfällt wie oben in disjunkte Quader. Ebenso

$$\left(\coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right) \setminus \left(C_1^n \times C_2^n \cap \coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right) = \coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j \setminus \left(C_1^n \times C_2^n \cap \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
&(C_1^n \times C_2^n) \setminus \left(C_1^n \times C_2^n \cap \coprod_{j=1}^l \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right) \\
&= (C_1^n \times C_2^n) \setminus \coprod_{j=1}^l \left(C_1^n \times C_2^n \cap \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right) \\
&= \left(\coprod_{i=1}^k \hat{C}_1^i \times \hat{C}_2^i\right) \setminus \coprod_{j=1}^{l-1} \left(C_1^n \times C_2^n \cap \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right) \\
&= \coprod_{i=1}^k \left(\hat{C}_1^i \times \hat{C}_2^i \setminus \coprod_{j=1}^{l-1} \left(\hat{C}_1^n \times \hat{C}_2^n \cap \tilde{C}_1^j \times \tilde{C}_2^j\right)\right).
\end{aligned}$$

In Worten: Wir nehmen aus unserem Quader $(C_1^n \times C_2^n)$ einen Quader $\left(C_1^n \times C_2^n \cap \tilde{C}_1^l \times \tilde{C}_2^l\right)$ heraus. Wie wir oben gesehen haben zerfällt die resultierende Menge in disjunkte Quader $\hat{C}_1^i \times \hat{C}_2^i$. Aus diesen disjunkten Quadern müssen jetzt (jeweils) nur noch maximal $l-1$ Schnittmengen entfernt werden, d. h. nach endlich vielen Schritten sind wir fertig.

(b) Offensichtlich ist $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{A}$. Weiter haben wir in Teil (a) gesehen, dass das Komplement eines Quaders in Quader zerfällt.[2] Die Vereinigung von $A,\ B \in \mathcal{A}$ ist nach Definition ebenfalls in $\mathcal{A}$.

(c) Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig und $A = \coprod_{j=1}^n C_j,\ C_j := C_1^j \times C_2^j$ eine Zerlegung in disjunkte Quader, die nach (a) existiert. Wir definieren $\mu(A) := \sum_{j=1}^n \mu(C_j)$ und $\mu(C_j) := \mu_1(C_1^j)\mu_2(C_2^j)$.

Behauptung 1. Die nicht negative Zahl μ ist unabhängig von der gewählten disjunkten Zerlegung.

Beweis. Sei $A = \coprod_{j=1}^n D_j,\ D_j := D_1^j \times D_2^j$ eine weitere disjunkte Zerlegung. Wegen $C_i = \coprod_{j=1}^n \underbrace{C_i \cap D_j}_{=:\coprod_{\hat{l}} \hat{E}_{\hat{l}}} = \coprod_{l=1}^k E_{il}$[3] erhalten wir die feinere disjunkte Zerlegung von

[2] Für den Quader B wähle $A_i = \Omega_i,\ i = 1, 2$ und $W = \Omega \cap B = B$ um $B^c = A_1 \times A_2 \setminus W \in \mathcal{A}$ zu schließen.
[3] E_{il} durchläuft die disjunkten Zerlegungen $\hat{E}_{\hat{l}}$ aller $D_i \cap C_j$.

Quadern E_{il} von A (vgl. (a)). Wenn wir zeigen können, dass μ für die Zerlegungen $(C_i)_i$ und $(E_{il})_{il}$ gleich ist, dann folgt dies auch analog für $(D_i)_i$ und $(E_{il})_{il}$ und somit für $(C_i)_i$ und $(D_i)_i$. Wir haben das Problem also auf die (zu zeigende) Aussage $\mu(C_i) = \sum_{l=1}^k \mu(E_{il})$ für einen Quader C_i reduziert. Wir verfeinern die Zerlegung weiter, indem wir wie folgt eine Zerlegung von C_1^i aus E_{il} konstruieren: Sei $E_{il} = E_1^{il} \times E_2^{il}$ und $F_1^{ik} = \{\bigcap_{j=1}^k E_1^{il_j} | 1 \leq l_1 < \cdots < l_k \leq k\}$ die Menge aller Schnitte von k verschiedenen Mengen. Sei weiter $F_1^{im} := \{\bigcap_{j=1}^m E_1^{il_j} \setminus \left(E^{il_j} \cap \bigcup_{s=m+1}^k \bigcup_{F \in F_1^{is}} F \right) | 1 \leq l_1 < \cdots < l_m \leq k\}$, $1 \leq m \leq k-1$, und $\{F_1^{i1}, \ \ldots, \ F_1^{ir_1}\} := \{F \subset C^i | \ \exists 1 \leq j \leq k : F \in F_1^{ij}\}$, dann ist $(F_1^{il})_l$ eine disjunkte Zerlegung von C^i. Trotz dieser sehr te chnischen Konstruktion ist die Idee, die uns zu dieser Zerlegung geführt hat, einfach: Wie wir später sehen werden, ist es wünschenswert, dass wir unseren Quader C_i in ein Raster zerlegen können, d. h. wir möchten disjunkte Zerlegungen $(F_1^{il})_l$ und $(F_2^{il})_l$ der beiden Seiten C_1^i und C_2^i finden, so dass die Paare $(F_1^{il} \times F_2^{ik})_{lk}$ den Quader C_i disjunkt überdecken. Wir entfernen also zunächst alle Schnitte von k Mengen und dann vom verbleibenden „Rest“ die Schnitte von $k-1$ Mengen, usw. Da wir alle bereits konstruierten Mengen im jeweils nächsten Schritt abgezogen haben, ist die Zerlegung nach Konstruktion disjunkt. Als Durchschnitt von Teilmengen von E_1^{il} (resp. E_2^{il}) ist die Zerlegung $(F_1^{il} \times F_2^{ik})_{lk}$[4] bereits eine Verfeinerung von E^{il}. Zur Vereinfachung setzen wir $C := C_i =: C_1 \times C_2$ und $(F_1^l \times F_2^k)_{lk} := (F_1^{il} \times F_2^{ik})_{lk}$.

Die abschließende Rechnung

$$\begin{aligned} \mu(C) = \mu_1(C_1)\mu_2(C_2) &= \left(\sum_{l=1}^{r_1} \mu(F_1^l) \right) \left(\sum_{l=1}^{r_2} \mu(F_2^l) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu(F_1^l)\mu(F_2^j) = \sum_{l=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \mu(F_1^l \times F_2^j) \end{aligned}$$

liefert das Ergebnis. □

Behauptung. μ ist ein Inhalt.

Beweis. $\mu(\emptyset) = \mu_1(\emptyset)\mu_2(\emptyset) = 0$ ist klar. Endliche Additivität folgt aus der Definition von μ. □

Behauptung. μ ist der einzige Inhalt mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Beweis. μ ist auf Quadern bereits festgelegt und jedes Element in $\mathcal{A}$ lässt sich nach Teil (a) disjunkt in Quader zerlegen, d. h. wegen endlicher Additivität ist μ eindeutig. □

[4] (F_2^{il}) ist die bereits erwähnte entsprechende Zerlegung von C_2