

Übungen zur Analysis 3

2.1ε (σ-)Subadditivität.

- (a) Es sei μ ein Inhalt auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

- (b) Nun sei μ sogar ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\mathcal{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

2.2 Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ alle die gleiche σ -Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$ erzeugen:

- (a) $\mathcal{E}_1 = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle.
- (b) $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.
- (c) $\mathcal{E}_3 = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.
- (d) $\mathcal{E}_4 = \{]a, b] \cap \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$

2.3 Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind:

- (a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- (b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}]$,
- (c) die Menge A aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer “3” vorkommt,
- (d) die Menge B aller Zahlen $x \in [0, 1[$, in deren Dezimaldarstellung unendlich oft die Ziffer “3”, aber nur endlich oft die Ziffer “4” vorkommt.

2.4 Klassifizierung von σ -Algebren auf abzählbaren Mengen. (Fortsetzung von Aufgabe 1.3)

- (a) Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, $\Sigma(\Omega)$ das Mengensystem aller Σ -Algebren darüber, und $\Pi(\Omega)$ das Mengensystem aller Partitionen darüber. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\text{part} : \Sigma(\Omega) \rightarrow \Pi(\Omega), \mathcal{A} \mapsto \text{part}(\mathcal{A})$ aus Übung 1.6 und die Abbildung $\sigma : \Pi(\Omega) \rightarrow \Sigma(\Omega), \mathcal{E} \mapsto \sigma(\mathcal{E})$ zueinander inverse Bijektionen sind.
- (b) Zählen Sie alle σ -Algebren auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ auf.

2.5* Produkte von Mengenalgebren und Inhalten. Für $j = 1, 2$ seien Ω_j eine Menge, $\mathcal{A}_j$ eine Mengenalgebra darüber und $\mu_j : \mathcal{A}_j \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Weiter sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie:

- (a) Jedes Element von $\mathcal{A}$ kann als endliche Vereinigung von *paarweise disjunkten* Rechtecken $A_1 \times A_2$ mit Seiten $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ dargestellt werden.
- (b) $\mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra über Ω .
- (c) Es gibt genau einen Inhalt $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ genau einen Inhalt μ_n auf der Mengenalgebra aller endlichen Vereinigungen von Quadern $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, $a_j \leq b_j$ in $[-\infty, \infty]$, mit $\mu(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 28.10.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

Präsenzaufgaben zu Blatt 2

T2.1 Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{E}, \Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie auch alle Elemente von $\sigma(\{\{1, 2\}\}, \Omega)$ an.

T2.2 Vergleich erzeugter σ -Algebren. Es seien Ω eine Menge, $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ Mengensysteme über Ω . Beweisen Sie:

(a) Aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$.

(b) Ist $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}')$ und $\mathcal{E}' \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, so folgt $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}')$.

T2.3 Es sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\Omega' \in \sigma(\mathcal{T}, \Omega)$ und $\mathcal{T}'$ die Teilraumtopologie auf Ω' bezüglich $\mathcal{T}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{B}(\Omega', \mathcal{T}') = \{A \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{T}) \mid A \subseteq \Omega'\}.$$

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „**ε**“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „*****“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.