Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2013/2014
Blatt 1
10.10.2013

Übungen zur Analysis 3
Lösung

1.1ε Es sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: $A \cap B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{A}$, wobei $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lösung:

Nach Definition 1.1, 2. und 3. folgt sofort $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$. Ebenso folgt $A \triangle B \in \mathcal{A}$ aus $A \setminus B$, $B \setminus A \in \mathcal{A}$ und 3..

1.2 Es sei $\Omega =]a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$. Wir betrachten das Mengensystem $\mathcal{A}(]a, b])$, bestehend aus allen endlichen Vereinigungen $\bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von halboffenen Intervallen $]a_j, b_j] \subseteq]a, b]$ mit $a \leq a_j < b_j \leq b$.

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass sich jedes $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ als eine endliche Vereinigung $A = \bigcup_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}_0$, von *paarweise disjunkten* Intervallen $]a_j, b_j]$ schreiben lässt.

(b) Überzeugen Sie sich auch davon, dass solch eine Darstellung von A eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq b$ fordert.

(c) Zeigen Sie, das $\mathcal{A}(]a, b])$ eine Mengenalgebra bildet.

(d) Folgern Sie, dass auch $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{A \cap \mathbb{R} |\ A \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])\}$ eine Mengenalgebra bildet.

(e) $\mathcal{A}(]a, b])$ ist *keine* σ-Algebra. Geben Sie zur Illustration hiervon (ohne Beweis) eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathcal{A}(]a, b])$ an, für die $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}(]a, b])$ gilt.

Lösung:

(a) Sei $A = \cup_{j=1}^{n}]a_j, b_j]$. Wir behaupten, dass wir A durch Wiederholung der folgenden zwei Schritte als disjunkte Vereinigung halboffener Intervalle schreiben können:

(a) Zerlegen zweier sich schneidender Intervalle in disjunkte Inveralle.

(b) Entfernen von Intervallen die vollständig in anderen enthalten sind.

Um dies möglichst transparent zu begründen, nennen wir eine endliche Menge von halboffenen Intervallen $D(A) = \{I_1, \ldots, I_l\}$ eine *Darstellung von A*, falls $A = \cup_k I_k$. Und mit $s(D(A))$ bezeichen wir die Anzahl der sich schneidenden Intervalle in der Darstellung $D(A)$. Unser ziel ist es eine Darstellung mit $s(D(A)) = 0$ zu finden.

Da A Vereinigung endlich vieler Intervalle ist, gibt es auch nur endlich viele Intervalle die sich schneiden. Es ist also stets $s(D(A)) < \infty$.

Sei $D_0(A) = \{]a_1, b_1], \ldots,]a_n, b_n]\}$. Wenden wir (b) auf $D_0(A)$ an, erhalten wir eine Darstellung $D_1(A)$ mit $s(D_1(A)) \leq s(D_0(A))$. Falls $s(D_1(A)) = 0$ sind wir fertig. Falls nicht existieren $]a_i, b_i]$ und $]a_j, b_j]$ in $D_1(A)$ mit nichtleerem Schnitt. Ohne Einschränkung sei

$a_i < a_j$ und $b_i < b_j$ (sonst liegt ein Intervall in dem anderen). Ersetze nun $]a_i, b_i]$ und $]a_j, b_j]$ durch $]a_i, b_j]$ und bezeichne die resultierende Darstellung mit $D_2(A)$. Dann gilt $s(D_2(A)) < s(D_1(A))$.

Anwenden von (b) liefert $D_3(A)$ mit $s(D_3(A)) \leq s(D_2(A))$. Da $D_0(A)$ endlich war, bricht dieser Prozess nach endlich vielen Schritten ab.

(b) Wir zeigen zuerst, dass eine solche Darstellung immer existiert. Dazu sei $A = \coprod_j]a_j, b_j]$ eine Darstellung durch disjunkte Intervalle, deren Existenz wir in (a) bewiesen haben. Falls $b_j = a_{j+1}$ so ersetze $]a_j, b_j] \cup]a_{j+1}, b_{j+1}]$ durch $]a_j, b_{j+1}]$.

Seien also $A = \cup_j]a_j, b_j] = \cup a'_j, b'_j]$ zwei Darstellungen mit $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq b$ bzw. $a \leq a'_1 < b'_1 < a'_2 < b'_2 < \ldots < a'_n < b'_{n'} \leq b$. Dann gilt offensichtlich $a_1 = a'_1$ und $b_n = b'_{n'}$. Angenommen $b_1 \neq b'_1$, d.h. ohne Einschränkung $b_1 < b'_1$. Wegen $b_1 < a_2$ liegt dann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ der Punkt $b_1 + \varepsilon$ nicht in $\cup]a_j, b_j]$, aber in $\cup]a'_j, b'_j]$. Widerspruch! Also ist $b_1 = b'_1$. Wir können jetzt analog für $\widetilde{A} = \cup_{j \geq 2}]a_j, bj] = \cup_{j \geq 2}]a'_j, b'_j]$ argumentieren und erhalten induktiv $a_i = a'_i$ und $b_i = b'_i$ für alle i.

(c) Mit der Definition $\cup_{j=1}^{0}]a_j, b_j] := \emptyset$ erhalten wir $\emptyset \in \mathcal{A}(]a, b])$.

Sei $A = \cup]a_j, b_j]$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n$. Dann ist $A^c =]a, a_1] \cup]b_2, a_3] \cup \ldots]b_n, b]$. Die Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen ist offensichtlich.
(d) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Für $A := C \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ mit $C \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ ist $]-\infty, \infty] \setminus C = A^c \cup (\{\infty\} \setminus C \cap \{\infty\}) \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ und somit $A^c = (]-\infty, \infty] \setminus C) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Mit dem Distributivgesetz für $\cap, \cup$ folgt aus $A := C \cap \mathbb{R},\ B := D \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])$ bereits $A \cup B = (C \cap \mathbb{R}) \cup (D \cap \mathbb{R}) = (C \cup D) \cap \mathbb{R} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.

(e) Für jede Menge $A \in \mathcal{A}(]a, b])$ gilt entweder $b \in A$ oder $[b - \varepsilon, b] \cap A = \emptyset$ für ein hinreiched kleines $\varepsilon > 0$. Es ist aber $\cup_{j=1}^{\infty}]a, b - \frac{1}{j}] =]a, b[$.

1.3 Partitionen und σ-Algebren über abzählbaren Mengen. Es sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darüber. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega) := \{\eta \in \Omega |\ \forall B \in \mathcal{A} :\ \omega \in B \Rightarrow \eta \in B\}$. Zeigen Sie:

(a)ε Berechnen Sie $A(\omega)$ für $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$ und alle $\omega \in \Omega$.

(b) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\omega \in A(\omega) \in \mathcal{A}$.

(c) Für alle $\omega, \eta \in \Omega$ gilt $A(\omega) = A(\eta)$ oder $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$. Das abzählbare Mengensystem $\mathrm{part}(\mathcal{A}) := \{A(\omega) |\ \omega \in \Omega\}$ bildet also eine *Partition* von Ω, also eine Zerlegung von Ω in nichtleere paarweise disjunkte Mengen.

(d) Zeigen Sie für alle $B \subseteq \Omega$, dass $B \in \mathcal{A}$ genau dann gilt, wenn B sich als eine Vereinigung von Elementen von $\mathrm{part}(\mathcal{A})$ darstellen lässt.

Lösung:

(a)ε Es ist $A(1) = \{1\}$ und $A(2),\ A(3) = \{2, 3\}$.

(b) Aus der obigen Schreibweise von $A(\omega)$ ist $\omega \in A(\omega)$ sofort klar.

Da eine σ-Algebra nur unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen ist, die Menge $\mathcal{A}(\omega) := \{B \in \mathcal{A} \mid \omega \in B\}$ aber potentiell überabzählbar ist, folgt $A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{A}(\omega)} B \in \mathcal{A}$ also nicht unmittelbar.

Die Behauptung $A(\omega) \in \mathcal{A}$ bedeutet insbesondere, dass $A(\omega) \in \mathcal{A}(\omega)$. Wir nutzen nun das Zornsche Lemma, um $A(\omega) \in \mathcal{A}(\omega)$ zu finden:

Lemma (Zornsches Lemma)**.** *Jede partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.*

Als partielle Ordnung auf $\mathcal{A}(\omega)$ wählen wir $A \leq B :\Leftrightarrow A \overset{!}{\supset} B$. Sei also $\{B_i\}_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge, d.h. für $B_j, B_k \in \{B_i\}_{i \in I}$ gilt stets $B_j \subset B_k$ oder $B_k \subset B_j$. Dann kann I höchstens so viele Elemente wie Ω enthalten und ist damit höchstens abzählbar. Da eine σ-Algebra unter abzählbaren Schnitte abgeschlossen ist, ist also auch $\cap_{i \in I} B_i \in \mathcal{A}$ und wegen $\omega \in B_i$ für alle $i \in I$ gilt sogar $\cap_{i \in I} B_i \in \mathcal{A}(\omega)$. Da offensichtlich $\cap_{i \in I} B_i \subset B_k$ für alle $k \in I$, ist $\cap_{i \in I} B_i$ eine obere Schranke von $\{B_i\}_{i \in I}$. Also besitzt $\mathcal{A}(\omega)$ ein maximales Element C.

Angenommen $C \neq A(\omega)$. Dann existiert ein $B \in \mathcal{A}(\omega)$ mit $B \cap C \subsetneq C$. Da aber $B \cap C \in \mathcal{A}(\omega)$ ist dies ein Widerspruch zur Maximalität von C. Also ist $C = \mathcal{A}(\omega) \in \mathcal{A}$.

(c)[1] Wenn $A(\omega) \neq A(\eta)$ dann ist o. B. d. A. $A(\omega) \cap A(\eta) \subsetneq A(\omega)$ und da $A(\omega) \in \mathcal{A}$ minimal ist mit $\omega \in A(\omega)$ (siehe (b)) folgt $\omega \notin A(\omega) \cap A(\eta) \in \mathcal{A}$ und damit auch $A(\omega) \subset A(\omega)^c \cup A(\eta)^c \Rightarrow A(\omega) \subset A(\eta)^c \Rightarrow A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$.

(c)[2] Sei $\tau \in A(\omega) \cap A(\eta)$. Es ist zu zeigen, dass $A(\omega) = A(\eta)$. Dazu zeigen wir, dass $A(\omega) = A(\tau)$ und analog $A(\eta) = A(\tau)$.

Es gilt

$$A(\omega) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \omega \in B}} B = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \omega, \tau \in B}} B \supset \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{A} \\ \tau \in B}} B = A(\tau).$$

Angenommen $A(\tau) \subsetneq A(\omega)$. Dann existiert $B \in \mathcal{A}$ mit $\tau \notin B \ni \omega$. Damit ist aber auch $B^c \in \mathcal{A}$ und $\tau \notin B^c \ni \omega$ im Widerspruch zu $\tau \in A(\omega)$. Folglich ist $A(\tau) = A(\omega)$.

(d)[1] „$\Leftarrow$" ist klar nach Teil (b) - $A(\omega) \in \mathcal{A}$. Umgekehrt folgt aus $B \in \mathcal{A}$ schon $B \subset \bigcup_{b \in B} A(b)$ und wegen $b \in A(b) \subset B \in \mathcal{A}$ für alle $b \in B$, schon $B = \bigcup_{b \in B} A(b)$.

(d)[2] Es ist zu zeigen:

$$B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow B = \cup_{\omega \in C_B} A(\omega) \text{ für eine Teilmenge } C_B \subset \Omega.$$

"$\Leftarrow$": $B \in \mathcal{A}$ ist in diesem Fall klar, denn C_B ist höchstens abzählbar.

"$\Rightarrow$": Wir behaupten, dass in diesem Fall $B = \cup_{\omega \in B} A(\omega)$ gilt.

Es genügt zu zeigen, dass $A(\omega) \subset B$ für alle $\omega \in B$. Das ist aber klar, denn

$$A(\omega) = \bigcap_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ \omega \in C}} = \bigcap_{\substack{C \in \mathcal{A} \\ \omega \in C}} \cap B \subset B.$$

Bemerkung: Für die Teilaufgaben (c) und (d) finden Sie zwei unterschiedliche Formulierungen der jeweiligen Lösung.

1.4 Elementare Eigenschaften signierter Maße. Es sei μ ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(b) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$,

(c) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$, falls $B \subseteq A$,

(d) $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$.

Lösung:

(c) Es ist $A = (B \setminus A) \coprod A$ und damit aufgrund der Additivität von μ: $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$. Falls $\mu(B)$ endlich ist, folgt sogar $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. (Ansonsten ist die linke Seite eventuell $\infty - \infty$ und damit nicht definiert.)

(a) Falls $\mu(A \cap B) = \infty$ ist insbesondere $\mu(A) = \infty$ und damit steht auf beiden Seiten der Gleichung ∞ und es ist nichts zu zeigen. Ist $\mu(A \cap B) < \infty$ folgt aus $A \cup B = A \coprod B \setminus (A \cap B)$, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, wobei wir für die letzte Gleichung (c) verwendet haben.

(b) Es ist $A \setminus B \coprod B = A \cup B = B \setminus A \coprod A$ und die Behauptung folgt aus der Additivität von μ.

(d) Folgt aus wiederholter Anwendung von (a): Falls einer der Terme $\mu(A \cap B), \mu(B \cap C)$ oder $\mu(A \cap C)$ unendlich ist, ist nichts zu zeigen. Ansonsten impliziert (a) die folgenden drei Gleichungen:

$$\mu(A \cup (B \cup C)) + \mu(A \cap (B \cup C)) = \mu(A) + \mu(B \cup C) \tag{1}$$
$$\mu(B \cup C) + \mu(B \cap C) = \mu(B) + \mu(C) \tag{2}$$
$$\mu((A \cap B) \cup (A \cap C)) + \mu((A \cap B) \cap (A \cap C)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C), \tag{3}$$

wobei (2) bzw. (3) aufgrund der Annahme $\mu(A \cap B), \ldots < \infty$ äquivalent zu

$$\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) \tag{4}$$
$$\mu(A \cap (B \cup C)) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) - \mu(A \cap B \cap C) \tag{5}$$

sind. Die Behauptung folgt nun durch Einsetzen von (4) und (5) in die Gleichung (1).