

## Übungen zur Analysis 3

**1.1ε** Es sei  $\mathcal{A}$  eine Mengenalgebra und  $A, B \in \mathcal{A}$ . Zeigen Sie:  $A \cap B, A \setminus B, A \triangle B \in \mathcal{A}$ , wobei  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**1.2** Es sei  $\Omega = ]a, b]$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit  $a < b$ . Wir betrachten das Mengensystem  $\mathcal{A}(]a, b])$ , bestehend aus allen endlichen Vereinigungen  $\bigcup_{j=1}^n ]a_j, b_j]$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , von halboffenen Intervallen  $]a_j, b_j] \subseteq ]a, b]$  mit  $a \leq a_j < b_j \leq b$ .

- (a) Überzeugen Sie sich davon, dass sich jedes  $A \in \mathcal{A}(]a, b])$  als eine endliche Vereinigung  $A = \bigcup_{j=1}^n ]a_j, b_j]$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , von paarweise disjunkten Intervallen  $]a_j, b_j]$  schreiben lässt.
- (b) Überzeugen Sie sich auch davon, dass solch eine Darstellung von  $A$  eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich  $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n \leq b$  fordert.
- (c) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}(]a, b])$  eine Mengenalgebra bildet.
- (d) Folgern Sie, dass auch  $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{A \cap \mathbb{R} \mid A \in \mathcal{A}(]-\infty, \infty])\}$  eine Mengenalgebra bildet.
- (e)  $\mathcal{A}(]a, b])$  ist *keine*  $\sigma$ -Algebra. Geben Sie zur Illustration hiervon (ohne Beweis) eine Folge  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $\mathcal{A}(]a, b])$  an, für die  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}(]a, b])$  gilt.

**1.3 Partitionen und  $\sigma$ -Algebren über abzählbaren Mengen.** Es sei  $\Omega$  eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra darüber. Für jedes  $\omega \in \Omega$  sei  $A(\omega) := \{\eta \in \Omega \mid \forall B \in \mathcal{A} : \omega \in B \Rightarrow \eta \in B\}$ . Zeigen Sie:

- (a)ε Berechnen Sie  $A(\omega)$  für  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}\}$  und alle  $\omega \in \Omega$ .
- (b) Für alle  $\omega \in \Omega$  ist  $\omega \in A(\omega) \in \mathcal{A}$ .
- (c) Für alle  $\omega, \eta \in \Omega$  gilt  $A(\omega) = A(\eta)$  oder  $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$ . Das abzählbare Mengensystem  $\text{part}(\mathcal{A}) := \{A(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$  bildet also eine *Partition* von  $\Omega$ , also eine Zerlegung von  $\Omega$  in nichtleere paarweise disjunkte Mengen.
- (d) Zeigen Sie für alle  $B \subseteq \Omega$ , dass  $B \in \mathcal{A}$  genau dann gilt, wenn  $B$  sich als eine Vereinigung von Elementen von  $\text{part}(\mathcal{A})$  darstellen lässt.

**1.4 Elementare Eigenschaften signierter Maße.** Es sei  $\mu$  ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Beweisen Sie für  $A, B, C \in \mathcal{A}$ :

- (a)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ ,
- (b)  $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ ,
- (c)  $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$ , falls  $B \subseteq A$ ,
- (d)  $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$ .

**Abgabe:** Bis spätestens Montag, den 21.04.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.

## Präsenzaufgaben zu Blatt 1

- T1.1ε** Überlegen Sie sich, dass man den gleichen Begriff von Mengenalgebren bzw. von  $\sigma$ -Algebren erhält, wenn man in der Definition die Forderung “1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ” durch “1.  $\Omega \in \mathcal{A}$ ” ersetzt.
- T1.5ε Monotonie von Inhalten.** Es  $\mu$  ein Inhalt auf einer Mengenalgebra  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie  $\mu(A) \leq \mu(B)$  für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subseteq B$ .

Aufgaben mit einem „**T**“ werden üblicherweise in den Tutorien als Präsenzaufgaben gestellt. Entsprechend sind diese Aufgaben **nicht** abzugeben, sie werden nicht korrigiert und es werden keine Musterlösungen dazu veröffentlicht. Aufgaben mit einem „**ε**“ haben eine kurze Lösung. Aufgaben mit einem „**\***“ sind oft schwierig und/oder zeitaufwendig.