Zusammenstellung alter Klausuraufgaben Prof. F. Merkl

(keine Abgabe, keine Korrektur, keine Lösungsvorschläge) 26. Juni 2013

Zu Ihrer Information und um Ihnen zusätzliches Übungsmaterial bereit zu stellen, sind hier die Aufgaben beider Klausuren zu meiner Vorlesung Analysis 2 vom Sommersemester 2005 zusammengestellt. Beachten Sie aber, dass die gegenwärtige Vorlesung teilweise anderen Stoff als die frühere Vorlesung behandelt.

Aufgabe 1:

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Von der differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(1,2) = 1,\ D_1 f(1,2) = 2,\ D_2 f(1,2) = 3.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f(f(t^2, 2t), 2t)$ an der Stelle $t = 1$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{10(e^{y-x}+1)} = y, \\[2ex] \dfrac{1}{e^{x+y}+10} = x \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Tangentialebene T an das Hyperboloid

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 - 2xy + y^2 - z^2 - 2z + 2 = 0\}$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, 1)$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\}$.

Aufgabe 4: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - 4y_2, \quad y_1(0) = 4, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2, \quad y_2(0) = 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Gegeben sei die Menge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$. Beweisen Sie: Die Funktion

$$f : A \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = e^x - e^y + e^{x-y}$$

nimmt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum als Wert an.

Aufgabe 6:

a) Definieren Sie für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Aussage "g ist differenzierbar".

b) Zeigen Sie *direkt mit dieser Definition*, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung Dg.

Aufgabe 7:

a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

b) Beweisen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}\sin(xy), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

besitzt genau eine Lösung $y \in \mathcal{C}[0, 1]$.

Aufgabe 8: Finden Sie $\mu \in \mathbb{R}$ und $E \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \exp\{-\mu||x||_2\}$$

die partielle Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2}\triangle\phi(x) - \frac{1}{||x||_2}\phi(x) = E\phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

löst.

Aufgabe 9:

a) Es seien (A, d_A) und (B, d_B) zwei metrische Räume und $F : A \to B$ eine Abbildung. Definieren Sie die Aussage: "F ist gleichmäßig stetig".

b) Nun sei $A = \mathcal{C}[0, 1]$ und

$$d_A : A \times A \to \mathbb{R},\ d_A(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Weiter sei $B = \mathbb{R}$ und

$$d_B : B \times B \to \mathbb{R}, d_B(x, y) = |x - y|\,.$$

Zeigen Sie: Bezüglich dieser Metriken ist die Abbildung

$$F : A \to B, F(f) = \int_0^1 xf(x)dx$$

gleichmäßig stetig.

Aufgabe 10:

a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{8} \arctan(x + y + a) \\ y &= \arctan\left(\tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{8}y\right) + b \end{aligned}$$

genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 11:

a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge. Definieren Sie die Aussage "M ist kompakt".

b) Beweisen Sie: Die Einschränkung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x + y + z$$

auf die Menge

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 \text{ und } x + y = 2z\right\}$$

nimmt sowohl ein Maximum als auch ein Minimum als Wert an.

c) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Einschränkung von f auf M ihr Minimum bzw. ihr Maximum annimmt, sowie den Wert des Maximums und des Minimums.

Aufgabe 12:

a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und $\omega : \mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$ eine glatte Differentialform 1. Stufe. Definieren Sie den Rückzug $f^*\omega$.

b) Nun sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (t, t^2, t^3)$$

und

$$\omega : \mathbb{R}^3 \to \left(\mathbb{R}^3\right)^*,\ \omega(x, y, z) = yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz.$$

Berechnen Sie $f^*\omega$.

c) Ist ω geschlossen? Ist ω exakt? Berechnen Sie das Integral von ω über den positiv orientierten Einheitskreis in der x-y-Ebene.

Aufgabe 13:

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ein Maß und $A, B, C \in \mathcal{A}$ messbare Mengen mit

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(C),$$
$$\mu(A \cap B) = \mu(B \cap C) = \mu(A \cap C) = \tfrac{1}{2},$$
$$\mu(A \cup B \cup C) = 2$$

sowie

$$\mu(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{2}.$$

Berechnen Sie $\mu(A)$.

Aufgabe 14:

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

b) Es sei

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) \text{ für } x \leq y; \\ \\ y(1-x) \text{ für } x > y. \end{cases}$$

Weiter sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir definieren

$$h :]0,1[\to \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^1 f(x,y)g(y)dy.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in]0,1[$ gilt: $h''(x) = -g(x)$.

Hinweis: Zerlegen Sie das Integral über $[0,1]$ in ein Integral über $[0,x]$ und ein Integral über $[x,1]$.

Aufgabe 15: Es sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + 5y^2 + 6xy + 2xz + 4yz = 1\}$.

a) Beweisen Sie: M ist eine 2-dimensionale $\mathcal{C}^1$-Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie T_vM, wobei $v = (2,-1,1)^t$. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form

$$T_vM = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\right\}.$$

Aufgabe 16:

a) Definieren Sie für zwei Mengen $M, \mathcal{T}$ die Aussage: "$\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf M".

b) Wir setzen $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, M\}$.

Zeigen Sie: Die Identität

$$\mathrm{id} : M \to M,\ \mathrm{id}(x) = x,$$

ist eine stetige Abbildung von $(M, \mathcal{T}_1)$ nach $(M, \mathcal{T}_2)$.