Sommersemester 2013 München, den 23.9.2013
Modulprüfung zur “Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen”
Veranstaltungsnummer 16148
Dozent: Prof. Dr. Franz Merkl
Mathematisches Institut der Universität München

Nachklausur zur “Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen”

1. $(2 + 5 = 7$ Punkte)

   (a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz, inklusive des dazugehörigen Iterationsverfahrens und quantitativen Fehlerschranken.

   (b) Beweisen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{20}[\cos x + 2\sin y + \cos z], \\ y &= \frac{1}{20}[\sin(2x) + \cos y - \sin z], \\ z &= \frac{1}{20}[\sin x - \sin y + \cos(2z)] \end{aligned}$$

   genau eine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ besitzt.
   Hinweise: Es gibt mehrere verschiedene Lösungen dieser Aufgabe, die mit verschiedenen Normen arbeiten.

2. $(1 + 5 = 6$ Punkte)

   (a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher inklusive ihrer Voraussetzungen.

   (b) Gegeben seien glatte Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sowie $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es gelte $\Delta f = 0$, $D_1 g_1 = D_2 g_2$ und $D_1 g_2 = -D_2 g_1$, wobei Δ den Laplaceoperator bezeichnet. Zeigen Sie $\Delta h = 0$. *Achten Sie beim Aufschreiben der Rechnung besonders auf die Nachvollziehbarkeit der Schritte.*

3. $(1 + 5 = 6$ Punkte)

   (a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

   (b) Berechnen Sie die Lösung $(y_1(x), y_2(x))$, $x \in \mathbb{R}$, des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -3y_1(x) + 4y_2(x), & y_1(0) &= 1, \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + y_2(x), & y_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

4. $(2 + 2 + 1 + 3 = 8$ Punkte) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

   und die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x + y + z$.

(a) Beweisen Sie, dass M kompakt ist.

(b) Beweisen Sie, dass M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.

(d) Berechnen Sie $\max_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z)$. Geben Sie auch die Stelle $(x,y,z) \in M$ an, an der dieses Maximum angenommen wird.

5. $(1+2+1+4 = 8$ Punkte)

(a) Gegeben sei ein metrischer Raum (M,d). Definieren Sie, wann ein Tripel $(\hat{M},\hat{d},i)$ eine Vervollständigung von (M,d) genannt wird.
Hinweis: Gefragt ist die *Definition* einer Vervollständigung, nicht die Konstruktion von Vervollständigungen.

(b) Ab nun sei $V \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, der von den Funktionen $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(x) = e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ aufgespannt wird. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum V sei mit der Norm

$$\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_V = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2)\,dx}$$

versehen. Drücken Sie die quadrierte Norm $\|f\|_V^2$ durch eine einfache Formel mit Hilfe der Fourierkoeffizienten f_k, $k \in \mathbb{Z}$, von f aus.

(c) Formulieren Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$.

(d) Nun sei $(\hat{V}, \|\cdot\|_{\hat{V}})$ eine Vervollständigung von $(V, \|\cdot\|_V)$, wobei V als Teilraum von $\hat{V}$ aufgefaßt wird. Beweisen Sie, dass die Auswertungsfunktion $\delta_0 : V \to \mathbb{C}$, $\delta_0(f) = f(0)$ zu einer stetigen Abbildung $\hat{\delta}_0 : (\hat{V}, \|\cdot\|_{\hat{V}}) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der vorhergehenden Teilaufgaben.

6. $(1+5 = 6$ Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von den impliziten Funktionen. Geben Sie dabei insbesondere die Ableitungsformel für implizit definierte Funktionen an.

(b) Gegeben sei eine feste $n \times n$-Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und die Abbildung $g : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(X) = XBX^{-1}$. Dabei bezeichnet $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ \det X \neq 0\}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Der Funktionswert $Y = g(X)$ kann auch implizit durch die Gleichung $YX - XB = 0$ definiert werden. Berechnen Sie den Wert der Ableitung $dg_{\mathrm{Id}}(A)$ mit Hilfe des Satzes von den impliziten Funktionen. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix.

7. $(1+2+2+2 = 7$ Punkte)

(a) Gegeben seien offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$, eine glatte Abbildung $f : U \to V$, wobei $m,n \in \mathbb{N}$, sowie eine 1-Form ω auf V. Definieren Sie den Rückzug $f^*\omega$.

(b) Es seien ab nun die 1-Form $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^2)'$,

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

die Abbildung $f :]-1,1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(a,t) = (a + \cos t, -\sin t)$, und die Schar von parametrisierten Kurven $f_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f_a(t) = f(a,t)$, mit $-1 < a < 1$ gegeben. Berechnen Sie den Rückzug $f^*\omega$.

(c) Beweisen Sie, dass das Kurvenintegral $I_a := \int_{f_a} \omega$ für alle $a \in]-1,1[$ den gleichen Wert annimmt.
Hinweis: Es gibt eine Lösung, die kaum Rechnungen erfordert.

(d) Berechnen Sie diesen Wert I_a für $-1 < a < 1$.