Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Klausur
27.07.2013

Klausur zur “Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen”

1.1 (5 = 1 + 4 Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version der mehrdimensionalen Kettenregel.

(b) Gegeben seien eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(0) = 0$. Es sei $p(x) = c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ das Taylorpolynom 3. Grades von y mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Stellen Sie die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 von p mit Hilfe von partiellen Ableitungen $f_\alpha := D^\alpha f(0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$, dar.

1.2 (5 = 1 + 4 Punkte)

(a) Gegeben seien zwei normierte Räume $(U, \|\cdot\|_U)$ und $(V, \|\cdot\|_V)$, ein Punkt $x \in U$ und eine Funktion $f : U \to V$. Definieren Sie, wann f differenzierbar an der Stelle x mit der Ableitung df_x genannt wird.

(b) Nun seien $n \in \mathbb{N}$, $U = V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der Raum der reellen $n \times n$-Matrizen, versehen mit einer Norm Ihrer Wahl, und $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^2$ die Quadratabbildung für Matrizen. Geben Sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Wert $df_A(B)$ der Ableitung von f an und beweisen Sie dieses Ergebnis *direkt mit Hilfe der Definition aus Teilaufgabe (a), ohne Verwendung von Ableitungsregeln.*

1.3 (9 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 Punkte) Gegeben sei die 1-Form $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^2)'$,

$$\omega_{(x,y)} = \frac{(x - y)\, dx + (x + y)\, dy}{x^2 + y^2}$$

(a) Beweisen Sie durch eine Rechnung, dass ω eine geschlossene 1-Form ist.

(b) Berechnen Sie den Rückzug $f^*\omega$ der Form ω unter der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t)$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{S^1} \omega$, wobei S^1 den im positiven Sinn (d.h. im Gegenuhrzeigersinn) orientierten Einheitskreis bezeichnet.

(d) Entscheiden Sie mit Begründung, ob ω eine exakte 1-Form ist.

(e) Formulieren Sie eine Version des Lemmas von Poincaré.

(f) Entscheiden Sie mit Begründung, ob der Rückzug $f^*\omega$ von Teilaufgabe (b) exakt ist.

1.4 (11 = 3 + 2 + 2 + 1 + 3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie $M = \{x \in \mathbb{R}^4 |\ f(x) = f(1, 1, 1, 1)\}$ das Niveaugebilde von f durch den Punkt $(1, 1, 1, 1)$.

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob $0 \in \mathbb{R}^4$ ein lokales Minimum von f ist.

(b) Beweisen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist. Welche Dimension hat M?

(c) Beweisen Sie, dass M kompakt ist.

(d) Formulieren Sie den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren.

(e) Finden Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^{4} \beta_j x_j$ mit

$$g(1, 1, 1, 1) = \sup g[M] = 1.$$

Geben Sie $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

1.5 $(5 = 1 + 4$ Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version der Parseval-Gleichung für Fourierreihen.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Beweisen Sie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \right|^2 .$$

Hinweis: Eine Lösung verwendet an geeigneter Stelle partielle Integration.

1.6 $(5 = 1 + 4$ Punkte)

(a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$k := \sup_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \right| < 1.$$

Beweisen Sie, dass die Integralgleichung

$$g(x) = \int_0^x f(x, y, g(y)) \, dy \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

genau eine Lösung $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ besitzt.
Hinweis: Sie können hierbei mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ arbeiten.

1.7 $(10 = 1 + 3 + 3 + 3$ Punkte)

(a) Formulieren Sie eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{g_\lambda | \ \lambda \geq 0\}$ der Funktionen $g_\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, einen bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ dichten Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C([0, 1], \mathbb{R})$ aufspannt.

(c) Gegeben sei eine stetige Funktion $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi_f : (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad \phi_f(g) = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

stetig ist.

(d) Folgern Sie: Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\forall \lambda \geq 0 : \int_0^1 f(x)e^{\lambda x} \, dx = 0,$$

so gilt $f = 0$.
Hinweis: Es wird empfohlen, bei dieser Teilaufgabe die vorhergehenden Teilaufgaben (b) und (c) zu verwenden.