MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 12
05.07.2013

Übungen zur Analysis 2

Aufgabe 12.1 ist die bereits angekündigte Fortsetzung von Aufgabe 11.6.

12.1 Optionspreise im Black-Scholes-Modell. Eine "*europäische Call-Option*" ist ein Finanzderivat, das seinem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht gibt, zu einem vereinbarten zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit eines vereinbarten "Basiswerts" (z.B. einer Aktie, einer Währung, eines Rohstoffs) zu einem vereinbarten Preis K zu kaufen. Die Option verfällt damit wertlos zur Zeit T, wenn der Marktpreis S_T des Basiswerts zur Zeit T kleiner oder gleich K ist; andernfalls hat sie dann den Wert $S_T - K$. Zur Zeit T besitzt die Call-Option also den Wert $\max\{S_T - K, 0\}$. Der Preis C einer solchen Call-Option zu einer früheren Zeit $t < T$ wird vom Wert S des Basiswerts zu dieser Zeit abhängen: $C = C(t, S)$. Betrachten wir den mit dem Marktzins r diskontierten Optionspreis

$$L(t, x) := e^{-rt} C(t, S)$$

in Abhängigkeit vom logarithmierten diskontierten Basiswertpreis

$$x := \log(e^{-rt} S).$$

In einem berühmten finanzmathematischen Modell, dem *Black-Scholes Modell*, wird der diskontierte Preis L durch die *Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung mit Drift*

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

für $t < T$ und $x \in \mathbb{R}$ beschrieben. Hierbei ist $\sigma > 0$ ein Modellparameter, die "*Volatilität*" des Basiswerts, der das Ausmaß der stochastischen Fluktuationen des Basiswerts quantifiziert. (Die zugrundeliegenden Modellannahmen und eine Herleitung der Gleichung (1) aus diesen Annahmen mit Methoden der Stochastik können Sie in Vorlesungen zur stochastischen Analysis und Finanzmathematik lernen.)

(a) **Driftentfernung, Zeitskalierung und Zeitumkehr.** Zeigen Sie, dass mit der affin-linearen Transformation

$$f(\tilde{t}, \tilde{x}) := L(T - \sigma^{-2}\tilde{t}, \tilde{x} + \tilde{t}/2) \quad \text{mit } \tilde{t} > 0, \tilde{x} \in \mathbb{R}$$

die obige Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung (1) äquivalent zur einfachen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2}$$

wird.

(b) **Black-Scholes Differentialgleichung.** Folgern Sie aus der Rückwärts-Wärmeleitungsgleichung (1) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0.$$

Sie wird “Black-Scholes Differentialgleichung” genannt.

(c) **Black-Scholes-Preise europäischer Call-Optionen.** Finden Sie eine Lösung $C(t, S)$, $t < T$, $S > 0$ der Black-Scholes Differentialgleichung mit der Randbedingung

$$C(t, S) \to \max\{S_T - K, 0\} \text{ für } (t, S) \to (T, S_T),\ t < T,$$

indem Sie die Lösung

$$f(\tilde{t}, \tilde{x}) = e^{\tilde{x}+\frac{\tilde{t}}{2}}\Phi(\tilde{t}^{-1/2}(\tilde{x} + \tilde{t} - \log K)) - K\Phi(\tilde{t}^{-1/2}(\tilde{x} - \log K))$$

der Wärmeleitungsgleichung aus Aufgabe **11.6** (a) transformieren. Überprüfen zur Probe mit einer direkten Rechnung, dass Ihr Ergebnis wirklich die Black-Scholes Differentialgleichung löst.

(d) **Veranschaulichung des Ergebnisses.** Veranschaulichen Sie sich diese Optionspreise $C(t, S)$ im Black-Scholes-Modell für den Fall $r = 0$, $T = 0$, $\sigma = 1$ und $K = 1$, indem Sie den Graphen von $S \mapsto C(t, S)$ für verschiedene $t < 0$ in ein einziges S-C-Diagramm skizzieren. (Eine qualitative Skizze genügt.) **[10 Punkte]**

12.2 Newtonverfahren und vereinfachtes Newtonverfahren.
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$r\cos\phi = x$$
$$r\sin\phi = y$$

für die rechte Seite $(x, y) = (1.1,\ 0.1)$ näherungsweise numerisch mit dem Taschenrechner (oder, noch besser, mit einem Computer)

(a) mit dem vereinfachten Newtonverfahren zum Start- und Referenzpunkt $(r_0, \phi_0) = (1, 0)$,

(b) mit dem Newtonverfahren zum gleichen Startpunkt.

Führen Sie jeweils einige Iterationen, z.B. drei, aus. Beobachten Sie, wie schnell sich die berechneten Näherungen an die exakte Lösung $(r, \phi) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$ annähern, aber auch, welcher Rechenaufwand jeweils nötig ist. **[10 Punkte]**

12.3 Quadratwurzel von Matrizen und Operatoren. *Bearbeiten Sie entweder Teil (a) oder Teil (b) der folgenden Aufgabe:*

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$Q : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q(A) = A^2$$

stetig differenzierbar mit der Ableitung $dQ_A(B) = A \cdot B + B \cdot A$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Folgern Sie, dass es eine stetig differenzierbare, in einer offenen Umgebung V_1 von $\mathrm{Id} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definierte Abbildung $\mathrm{sqrt} : V_1 \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto \sqrt{A}$, mit $\sqrt{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ gibt, die Q genügend nahe bei Id invertiert. Zeigen Sie $d\,\mathrm{sqrt}_{\mathrm{Id}}(A) = \frac{1}{2}A$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Es sei $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$Q : (\mathcal{B}(U,U), \|\cdot\|_{U\to U}) \to (\mathcal{B}(U,U), \|\cdot\|_{U\to U}), \quad Q(A) = A \circ A$$

stetig differenzierbar mit der Ableitung $dQ_A(B) = A \circ B + B \circ A$ für $A, B \in \mathcal{B}(U,U)$ ist. Folgern Sie, dass es eine stetig differenzierbare, in einer offenen Umgebung V_1 von $\mathrm{id}_U \in \mathcal{B}(U,U)$ definierte Abbildung $\mathrm{sqrt} : V_1 \to \mathcal{B}(U,U)$, $A \mapsto \sqrt{A}$, mit $\sqrt{\mathrm{id}_U} = \mathrm{id}_U$ gibt, die Q genügend nahe bei id_U invertiert. Zeigen Sie $d\,\mathrm{sqrt}_{\mathrm{id}_U}(A) = \frac{1}{2}A$ für $A \in \mathcal{B}(U,U)$. **[10 Punkte]**

12.4 Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz und dem Satz von den impliziten Funktionen, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{10}\arctan(g_1(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2) + x_1) \\ g_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{20}\arctan(g_1(x_1,x_2) - g_2(x_1,x_2) + x_2) \end{aligned}$$

es eine eindeutige glatte Funktion $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *global* implizit definiert wird. Berechnen Sie $dg_1(0,0)$ und $dg_2(0,0)$. **[10 Punkte]**

12.5 Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion und Matrix-Logarithmus. Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie für gegebenes $j \in \mathbb{N}$, dass die Matrix-Potenzfunktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^j$ die Ableitung $df_A(B) = \sum_{k=1}^{j} A^{k-1}BA^{j-k}$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die Matrix-Exponentialreihe

$$U \ni A \mapsto \exp(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} A^j$$

in $(C_b^1(U, \mathbb{R}^{n\times n}), \|\cdot\|_{C^1})$ konvergiert.

(c) Folgern Sie für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$d\exp_A(B) = \int_0^1 e^{tA} B e^{(1-t)A}\, dt.$$

Insbesondere gilt $d\exp_{\mathrm{Id}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$.

(d) Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass die Matrix-Exponentialfunktion $\exp|_U : U \to V := \exp[U] \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Homöomorphismus mit einer stetig differenzierbaren Umkehrung $\log : V \to U$ ist. Berechnen Sie $d\log_{\mathrm{Id}}$. **[10 Punkte]**

12.6 Funktionale Version der Ableitungsregel $d\frac{1}{1-x} = \frac{dx}{(1-x)^2}$.
Es sei $(U, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wir versehen $\mathcal{B}(U,U)$ wie immer mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{U\to U}$.

(a) Zeigen Sie für gegebenes $j \in \mathbb{N}$, dass die Operator-Potenzfunktion $f : \mathcal{B}(U,U) \to \mathcal{B}(U,U)$,

$$f(A) = A^j = \underbrace{A \circ \ldots \circ A}_{j\text{-mal}}$$

die Ableitung $df_A(B) = \sum_{k=1}^{j} A^{k-1} \circ B \circ A^{j-k}$ für $A, B \in \mathcal{B}(U,U)$ besitzt.

(b) Es sei $0 < k < 1$ und $U_k := \{L \in \mathcal{B}(U,U) |\ \|L\|_{U \to U} < k\}$. Zeigen Sie, dass die geometrische Reihe

$$f : U_k \ni A \mapsto (\mathrm{id}_U - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} A^j$$

in $(C_b^1(U_k, U), \|\cdot\|_{C^1})$ konvergiert.

(c) Folgern Sie für $A \in U_k$ und $B \in \mathcal{B}(U,U)$:

$$df_A(B) = f(A) \circ B \circ f(A).$$

[10 Punkte]

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 15.07.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.