Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 11
28.06.2013

# Übungen zur Analysis 2

*Für Studenten der Wirtschaftmathematik ist Aufgabe 11.6 von besonderem Interesse, da sie eine Vorbereitung für die die Analyse des Black-Scholes-Modells (später) darstellt.*

**11.1** Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \arctan(y/x)$. Berechnen Sie den Rückzug $f^*dg$ der Ableitung von $g$ unter der Polarkoordinatenabbildung

$$f : \mathbb{R}^+ \times \,]-\pi/2, \pi/2[\, \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (x,y) = f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$$

auf zwei verschiedene Weisen:

a) indem Sie $g \circ f$ ausrechnen und dann ableiten;

b) indem Sie die Ableitung von $g$ bilden und diese dann mit $df^*$ zurückziehen.

Schreiben Sie die Rechnung jeweils sowohl in Differentialnotation als auch in Matrixnotation. Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse übereinstimmen. **[10 Punkte]**

**Solution**

Let $g(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ and $f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. We calculate $f^*dg$ in the two following ways.

(a) We have $g \circ f(r,\phi) = \arctan(\tan\phi) = \phi$ and then we obtain

$$(f^*dg)_{(r,\phi)} = d(g \circ f)_{(r,\phi)} = d\phi.$$

(b) We first calculate $dx$ and $dy$ and then subsitute in

$$dg(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

We have $dx = \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi$ and $dy = \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi$. Thus, we obtain

$$f^*dg_{(r,\phi)} = \frac{-\sin\phi}{r}(\cos\phi dr - r\sin\phi d\phi) + \frac{\cos\phi}{r}(\sin\phi dr + r\cos\phi d\phi) = d\phi.$$

We can also write in the matrix version

$$Dg_{f(r,\phi)}Df_{(r,\phi)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**11.2** Berechnen Sie den Rückzug $f^*dg$ für folgende Daten (definiert jeweils auf geeigneten offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$):

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = e^{x_1x_2-x_3}$, $y_2 = e^{x_1x_2+x_3}$, $y_3 = e^{x_2x_3}$ und $dg(y_1, y_2, y_3) = y_2y_3\,dy_1 + y_1y_3\,dy_2 + y_1y_2\,dy_3$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1/(x_1 + x_2 + x_3), x_2/(x_1 + x_2 + x_3), x_1 + x_2 + x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ und $dg(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}[y_3\,dy_1 + 2y_3\,dy_2 + (y_1 + 2y_2)dy_3]$.

Gehen Sie dazu jeweils auf zwei verschiedene Weisen vor:

i) mit direkter Rechnung durch Anwendung der Adjungierten $df^*$ auf $dg$,

ii) durch Bestimmen einer Funktion $g$ mit der gegebenen Ableitung $dg$ und Berechnen von $d(g \circ f)$.

Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse von i) und ii) übereinstimmen. **[10 Punkte]**

**Solution**

(a) Let $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (e^{x_1x_2-x_3}, e^{x_1x_2+x_3}, e^{x_2x_3})$ and

$$dg(y_1, y_2, y_3) = y_2y_3dy_1 + y_1y_3dy_2 + y_1y_2dy_3. \qquad (\star)$$

We calculate $f^*dg$ in the two following ways.
1)We calculate $dy_i$ and then substitute in $(\star)$.

$$\begin{aligned} dy_1 &= e^{x_1x_2-x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 - dx_3); \\ dy_2 &= e^{x_1x_2+x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 + dx_3); \\ dy_3 &= e^{x_2x_3}(x_3dx_2 + x_2dx_3). \end{aligned}$$

Thus, we get

$$\begin{aligned} (f^*dg)_{(x_1,x_2,x_3)} &= e^{x_1x_2+x_3+x_2x_3}\left(e^{x_1x_2-x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 - dx_3)\right) \\ &\quad + e^{x_1x_2-x_3+x_2x_3}\left(e^{x_1x_2+x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 + dx_3)\right) \\ &\quad + e^{2x_1x_2}\left(e^{x_2x_3}(x_3dx_2 + x_2dx_3)\right) \\ &= e^{2x_1x_2+x_2x_3}(2x_2dx_1 + (2x_1 + x_3)dx_2 + x_2dx_3). \end{aligned}$$

2) Take $g(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2y_3$. We see that $g$ satisfies $(\star)$. We calculate $g \circ f$.

$$g \circ f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1x_2-x_3}e^{x_1x_2+x_3}e^{x_2x_3} = e^{2x_1x_2+x_2x_3},$$

and we have

$$f^*dg_{(x_1,x_2,x_3)} = d(g \circ f)_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{2x_1x_2+x_2x_3}(2x_2dx_1 + (2x_1 + x_3)dx_2 + x_2dx_3).$$

(b) Let $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}, \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}, x_1 + x_2 + x_3)$ and $dg$ is given by

$$dg(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}\left(y_3dy_1 + 2y_3dy_2 + (y_1 + 2y_2)dy_3\right). \qquad (*)$$

1) We first calculate $dy_i$ and then substitute in $(*)$.

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{x_2 + x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_1 + \frac{-x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_2 + \frac{-x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_3; \\ dy_2 &= \frac{-x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_1 + \frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_2 + \frac{-x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_3; \\ dy_3 &= dx_1 + dx_2 + dx_3. \end{aligned}$$

We obtain

$$
\begin{aligned}
f^*dg_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{x_1+2x_2}\Bigg[&\frac{x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3}dx_1 + \frac{-x_1}{x_1+x_2+x_3}dx_2 + \frac{-x_1}{x_1+x_2+x_3}dx_3 \\
&+ \frac{-2x_2}{x_1+x_2+x_3}dx_1 + \frac{2x_1+2x_3}{x_1+x_2+x_3}dx_2 + \frac{-2x_2}{x_1+x_2+x_3}dx_3 \\
&+ \frac{x_1+2x_2}{x_1+x_2+x_3}(dx_1+dx_2+dx_3)\Bigg] = e^{x_1+2x_2}(dx_1+2dx_2).
\end{aligned}
$$

2) Take $g(y_1,y_2,y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}$ and we see that $g$ satisfies $(*)$. Thus,

$$g \circ f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1+2x_2},$$

and we get

$$f^*dg_{(x_1,x_2,x_3)} = d(g\circ f)_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{x_1+2x_2}(dx_1+2dx_2).$$

**11.3 Multinomialformel.** Zeigen Sie für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ und für $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$ die folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel:

$$(h_1+\dots+h_n)^m = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}h^\alpha.$$

Aufgabe 11.3

Herr Lenk war so freundlich, mir seine Lösung zur Verf. zu stellen.

$r, n, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_r} := \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

a) $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$

Beh: $$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r=0 \\ n_1+\dots+n_r=n}}^{n} \binom{n}{n_1 \dots n_r} x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

Beweis durch Induktion nach n:

Beweis durch Induktion nach $n$:

Induktionsanfang: $n=1$:

$$(x_1+\dots+x_r)^1 = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r=0\\ n_1+\dots+n_r=1}}^{n} \binom{n}{n_1 \dots n_r} x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \binom{1}{0\dots 0\underset{\substack{\uparrow\\ n_j}}{1}0\dots 0} x_j^1$$

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$:

$$(x_1+\dots+x_r)^{n+1} = (x_1+\dots+x_r)^n (x_1+\dots+x_r) =$$

$$= \left[\sum_{\substack{n_1,\dots,n_r=0\\ n_1+\dots+n_r=n}}^{n} \binom{n}{n_1 \dots n_r} x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}\right](x_1+\dots+x_r) =$$

$$= \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r=0\\ n_1+\dots+n_r=n}}^{n} \sum_{j=1}^{r} \binom{n}{n_1 \dots n_r} x_1^{n_1}\cdots x_j^{n_j+1}\cdots x_r^{n_r} \qquad (1)$$

---

Beachte:

Jedes $r$-Tupel $(n_1,\dots,n_r)\in \mathbb{N}_0^r$ mit $n_1+\dots+n_r=n$ liefert genau $r$ verschiedene $r$-Tupel $(n_1,\dots,n_j+1,\dots,n_r)\in \mathbb{N}_0^r$, $j=1,\dots,r$ mit $n_1+\dots+(n_j+1)+\dots n_r = n+1$ und umgekehrt kommt man von

$(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_0^r$ mit $m_1 + \dots + m_r = n+1$ für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $m_j > 0$ zu einem Tupel $(m_1, \dots, m_j - 1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_0^r$ mit $m_1 + \dots + (m_j - 1) + \dots + m_r = n$.

Ordne nun die Summanden in (1) nach den verschiedenen Potenzen $x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r}$ (mit $m_1 + \dots + m_r = n+1$), dann folgt:

$$(x_1 + \dots + x_r)^{n+1} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = 0 \\ m_1 + \dots + m_r = n+1}}^{n+1} x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{n} \binom{n}{m_1 \dots m_{j-1}\ m_j - 1 \dots m_r} \right]$$

Nach Definition folgt aber für $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}_0^r$ mit $m_1 + \dots + m_r = n+1$:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{n} \binom{n}{m_1 \dots m_j - 1 \dots m_r} =$$

$$= \frac{n! \, (m_1 + m_2 + \dots + m_r)}{m_1! \dots m_r!} = \frac{n! \, (n+1)}{m_1! \dots m_r!}$$

$$= \binom{n+1}{m_1 \dots m_r}$$

$$\Longrightarrow (x_1 + \ldots + x_r)^{n+1} = \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_r = 0 \\ m_1 + \ldots + m_r = n+1}}^{n+1} \binom{n+1}{m_1 \ldots m_r} x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}.$$

**11.4** Entscheiden Sie für folgende Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ob sie positiv definit sind

(i) indem Sie das charakteristische Polynom ausrechnen und entscheiden, ob alle Nullstellen davon positiv sind,

(ii) mit Vorzeichen von Unterdeterminanten,

(iii) mit quadratischer Ergänzung. **[10 Punkte]**

11.4 a. i

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-5+\lambda) - 1(1-\lambda+1) + (3-\lambda)((1-\lambda)(5-\lambda)-1)$$

$$= \lambda - 6 + \lambda - 2 + (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 4)$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 20\lambda + 4$$

Das leite ich mal ab:

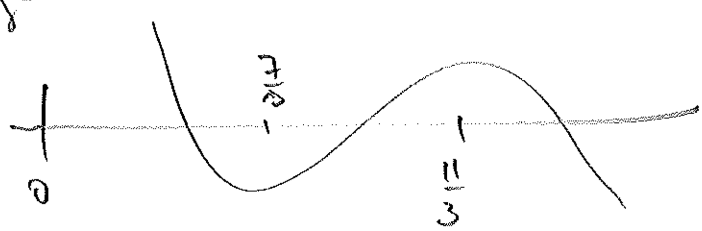
$-3\lambda^2 + 18\lambda - 20$ und bestimme

die NST:

$$\frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 12\cdot 20}}{-6} = 3 \pm \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{3\cdot 18 - 40}$$

$$= 3 \pm \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{14} \approx 3 \pm \frac{2}{3} = \frac{11}{3}; \frac{7}{3}$$

Das setze ich jetzt in das Polynom ein und stelle fest, dass es irgendwie so aussieht:




ii) $|1| > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|A| = 1\cdot(-6) - 1\cdot 2 + 3\cdot 4 > 0$$

iii) $$(x\ y\ z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\cdot x^2 - 1\cdot 2xy$$

$$+ 1\cdot 2xz + 5y^2 + 1\cdot 2yz + 3z^2$$

$+1\cdot 2xz + 5y^2 + 1\cdot 2yz + 3t^2$

$$= \left(\frac{x}{2} \mp 2y\right)^2$$

$$+ \left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,x + \sqrt{\tfrac{4}{3}}\,z\right)^2 + (y+z)^2 + \frac{2}{3}t^2 > 0$$

(Ich habe einfach nach Gefühl entfaltet und Glück gehabt.)

6.) i)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1\big(2-(3-\lambda)\big)$$

$$-1\,(1-\lambda-2) + (1-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda)-4\big)$$

$$= 2-3+\lambda+1+\lambda + (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-1)$$

$= -\lambda^3+5\lambda^2-\lambda-1$ ist bei 0 negativ, muss also schon eine negative Nst. haben.

Damit ist die pos. Definitheit im Eimer.

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$

iii) $(x\,y\,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= x^2 + 2 \cdot 2xy + 1 \cdot 2\,xz + 1 \cdot 2yz$

$+ 3y^2 + z^2$

$= -11/16$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ausprobiert.)

**11.5** Beweisen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, indem Sie ihre Cholesky-Zerlegung berechnen. **[10 Punkte]**

**Lösung**

Wir verwenden das Verfahren aus 2.49. Es ist $d_1 := a_{11} = 1 > 0,\ t_{11} := 1,\ t_{12} := -2,\ t_{13} := 1,\ t_{14} := -1$ und

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $d_2 := b_{11} = 4 > 0,\ t_{22} := 1,\ t_{23} := -\frac{1}{2},\ t_{24} := \frac{1}{2}$ und

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist $d_3 := c_{11} = 1 > 0,\ t_{33} := 1,\ t_{34} := -1$ und $d_4 := 1, t_{44} := 1$. Wir sehen, dass $A$ positiv-definit ist mit Cholesky-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=T}.$$

**11.6 Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung.** *Lösen Sie entweder die Variante (a) oder die Variante (b) der folgenden Aufgabe.*
Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

(a) $g(x) = \max\{e^x - K, 0\}$ für gegebenes $K > 0$.
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}|g(x)|\,dx < \infty$ für alle $a > 0$.

Weiter sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)\,dy. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $f$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

löst.
*Hinweis:*

(a) Zeigen und verwenden Sie hierzu die Formel

$$f(t,x) = e^{x+\frac{t}{2}}\Phi(t^{-1/2}(x+t-\log K)) - K\Phi(t^{-1/2}(x-\log K))$$

mit der Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Die Funktion $\Phi$ wird auch "*Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung*" genannt.

(b) Um zu zeigen, dass das Integral (1) mit den partiellen Ableitungen nach $x$ und $t$ vertauscht werden kann, bilden Sie Differenzenquotienten von $f$ und von $\partial f/\partial x$ und vergleichen Sie diese mit dem Integral der entsprechenden partiellen Ableitung des Integranden. Schätzen Sie die Restterme im Integranden mit der Taylorformel ab.

Zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung

$$f(x,t) \to g(x_0) \quad \text{für} \quad (x,t) \to (x_0, 0), t > 0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

*Hinweise:*

(a) Zeigen und verwenden Sie dabei:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |\Phi(x+y) - \Phi(x)| \leq \frac{|y|}{\sqrt{2\pi}}$$

und

$$\lim_{s\to\infty} \Phi(sa) = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0, \\ 1/2 & \text{für } a = 0, \\ 0 & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

(b) Spalten Sie den Integrationsbereich des Integrals

$$f(x,t) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} (g(y) - g(x))\, dy$$

für kleine $\delta > 0$ in die Bereiche $|y - x| > \delta$ und $|y - x| \leq \delta$ auf. Beachten Sie, dass der Teil zu $|y - x| > \delta$ im Limes $(x,t) \to (x_0, 0)$, $t > 0$ vernachlässigbar ist.

Sie dürfen die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi},$$

also $\lim_{z\to\infty} \Phi(z) = 1$, ohne Beweis verwenden; wir beweisen sie nämlich in der Analysis 3. **[10 Punkte]**

**Lösung**

(a) Wegen $e^y - K \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \log(K)$ gilt

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)\, dy.$$

Jetzt können wir $\Phi$ mittels der Transformation $\varphi_t : u \mapsto t^{-1/2}(u - t - x)$ mit $\varphi_t^{-1} : y \mapsto yt^{1/2} + t + x$ umschreiben in

$$\begin{aligned} \Phi(t^{-1/2}(x + t - \log K)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t^{-1/2}(\log K - x - t)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\log K}^{\infty} e^{-\frac{(t^{-1/2}(u-t-x))^2}{2}} t^{-1/2}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_{\log K}^{\infty} e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}} e^{\frac{2(u-x)-t}{2}}\, du \\ &= \frac{e^{-(x+t/2)}}{\sqrt{2t\pi}} \int_{\log K}^{\infty} e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}} e^{u}\, du. \end{aligned}$$

Analog erhält man mit der Transformation $\varphi_0 : u \mapsto t^{-1/2}(u-x)$ mit Umkehrung $\varphi_0^{-1} : y \mapsto yt^{1/2} + x$

$$\begin{aligned}\Phi(t^{-1/2}(x-\log K)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t^{-1/2}(\log K - x)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\log K}^{\infty} e^{-\frac{(t^{-1/2}(u-x))^2}{2}} t^{-1/2}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_{\log K}^{\infty} e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}}\,du.\end{aligned}$$

Es folgt $f(t,x) = e^{x+t/2}\Phi(t^{-1/2}(x+t-\log K)) - K\Phi(t^{-1/2}(x-\log K))$. Bevor wir dieses Integral ableiten, berechnen wir die inneren Ableitungen zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^{-1/2}(x+t-\log K)) = \frac{t^{-1}(\log(K)-x)+1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(t^{-1/2}(x+t-\log K)) = t^{-1/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^{-1/2}(x-\log K)) = \frac{t^{-1}(\log(K)-x)}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\Phi(z) = e^{-z^2/2}.$$

Mit der Ketten- und Produktregel ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) &= \frac{e^{x+t/2}}{2}\left(1 + \frac{t^{-1}(\log(K)-x)+1}{\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x+t-\log K))^2/2}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{Kt^{-1}(x-\log K)}{2\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\ &= \frac{e^{x+t/2}}{2} + K\frac{t^{-1}(\log(K)-x)+1}{2\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{Kt^{-1}(x-\log K)}{2\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\ &= \frac{e^{x+t/2}}{2} + \frac{K}{2\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2}.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sqrt{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x) \\ &= e^{x+t/2}\left(1 + (2t^{-1/2} - t^{-3/2}(x+t-\log K))e^{-(t^{-1/2}(x+t-\log K))^2/2}\right) + \dots \\ &\quad \dots + Kt^{-3/2}(x-\log K)e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\ &= e^{x+t/2} + \frac{K}{\sqrt{t}} e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2}.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) = \frac{\Delta}{2}f(t,x).$$

*Bemerkung:* Seien $P(z) = \sum_{j=0}^{p} p_j z^j$, $Q(z) = \sum_{j=0}^{q} q_j z^j$, $\deg(Q) > 0$, Polynome in $\mathbb{R}[z]$ und $\alpha > 0$. Es gilt für $|z| \geq 1$: $|P(z)| \leq \sum_{j=0}^{p} |p_j| z^p =: P z^p$, $|Q(z)| \leq \sum_{j=0}^{q} |q_j| z^q =: Q z^q$ und somit für $R(P,Q,\alpha,z) := P(z)e^{-\alpha(Q(z))^2}$ $\exists c \geq 1\ \forall |z| \geq c :$

$|R(P,Q,\alpha,z)| \leq \left|Pz^p e^{-\alpha(Qz^q)^2}\right| \leq |z|^{-2}$.[1] Die rechte Seite ist außerhalb einer Umgebung um 0 integrierbar. Da $R(P,Q,\alpha,z)$ auf $[-c,c]$ stetig ist folgt $\int_{-\infty}^{\infty} R(P,Q,\alpha,z)\ dz < \infty$.

Definiere die Funktionen

$$a(x) := \left(\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz\right)^2, \quad b(x) := 2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2(1+z^2)}{2}}}{1+z^2}\ dz, \quad c(x) := a(x) + b(x).$$

Wir können 2.7 anwenden um Ableitung und Integral zu vertauschen

$$\begin{aligned} a'(x) &= 2\left(\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz\right)\ e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ b'(x) &= 2\int_0^1 -x\ e^{-\frac{x^2(1+z^2)}{2}}\ dz = -2\left(\int_0^1 xe^{-\frac{x^2z^2}{2}}\ dz\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= -2\left(\int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}}\ ds\right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $s = xz$ verwendet haben. Es folgt $c'(0) = 0$, also $c$ konstant. Aber

$$c(0) = a(0) + b(0) = b(0) = 2\int_0^1 \frac{1}{1+z^2}\ dz = 2 \cdot [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

impliziert mit $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$[2] schon $\lim_{x\to\infty} a(x) = \frac{\pi}{2}$. Wurzelziehen und der Faktor 2 für negative reele Punkte liefern $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\ dz = \sqrt{2\pi}$.[3]

Weiter ist

$$\|\Phi(x+y) - \Phi(x)\| = \int_x^{y+x} \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dz \leq \frac{|y+x-x|}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sup_{\xi\in[x,x+y]} e^{\frac{-\xi^2}{2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{2\pi}},$$

d. h. $\Phi$ ist stetig. Wegen Symmetrie des Integrals erhalten wir außerdem

$$\lim_{s\to\infty} \Phi(sa) = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0, \\ 1/2 & \text{für } a = 0, \\ 0 & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Entsprechend ist

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} f(x,t) = \begin{cases} e^{x_0} - K & \text{für } x - \log(K) > 0 \Leftrightarrow e^x > K, \\ 0 & \text{für } x - \log(K) < 0 \Leftrightarrow e^x < K. \end{cases}$$

Schließlich ist $f$ auch in $(x_0, t_0) = (\log(K), 0)$ stetig, denn unabhängig von der approximierenden Folge erhalten wir $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} f(x,t) = 0 = x_0 - \log(K) = \frac{x_0 - \log(K)}{2}$. Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} f(x,t) = g(x)$.

[1] Wendet man die monotone Abbildung log an, so erhält man $\log(P) + p\log(|z|) - \alpha Q^2|z|^{2q} < -\beta|z|^{2q} < -2\log(|z|)$ für große $|z|$ und $0 < \beta < \alpha Q^2$.

[2] $\left\|\frac{e^{-\frac{x^2(1+z^2)}{2}}}{1+z^2}\right\|_\infty \leq e^{-x^2} \to 0$.

[3] In der Analysis 3, werden wir das Integral auf ein mehrdimensionales Integral zurückführen und dann lösen.

(b) Allg. gilt: Sei $h : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}, V \subset \mathbb{R}$ offen s. d. $\exists U \subset V,\ t_0 \in U$ offen mit

(i) $h(\cdot, t)$ integrierbar für alle $t \in U$,

(ii) $h(y, \cdot)$ 2-mal stetig differenzierbar für alle $y \in \mathbb{R}$,

(iii) $\sup_{t\in U} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\cdot, t)$ integrierbar.

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} h(y,t)\ dy\bigg|_{t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} h(y,t_0)\ dy.$$

Diese Aussage kann man wie folgt beweisen: Sei $s + t_0 \in U$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} h(y,t)\ dy &= \lim_{s\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y,t_0+s)-h(y,t_0)}{s}\ dy \\ &= \lim_{s\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(y,t_0) + \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(y,\xi)s}{2}\ dy, \quad \exists |\xi| < s \Rightarrow \xi \in U \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(y,t_0)\ dy + \lim_{s\to 0} s \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(y,\xi)}{2}\ dy,}_{<c \text{ nach (iii).}} \quad \exists c > 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(y,t_0)\ dy,\end{aligned}$$

wobei wir die Taylorentwicklung mit Lagrangeschem Restglied verwendet haben.

Sei $V_t := \mathbb{R}^+,\ V_x := \mathbb{R}$. Wir zeigen (i) und (iii) - (ii) ist klar: Sei $t \in U_\varepsilon(t_0),\ \overline{U_\varepsilon(t_0)} \subset \mathbb{R}^+,\ x \in U_\varepsilon(x_0) \subset V_x$. Man beachte, dass unsere Voraussetzung $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}|g(x)|\,dx < \infty,\ \forall a > 0$ mit $a < \frac{1}{2(t_0+\varepsilon)}$ schon $e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} < e^{-ay^2}$ für $|y| > c$ und $c$ groß genug impliziert. Also existiert $f(x_0,t_0)$ für alle $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Analog zur Bemerkung in Teil (a) können wir auch alle Ableitungsfunktionen von $\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ und große $|y|$ nach $e^{-ay^2}$ abschätzen.[4] Man beachte, dass jeweils $a$ und $c$ unabhängig von $(t,x) \in U_\varepsilon(t_0)\times U_\varepsilon(x_0)$ gewählt werden können. Da alle Integranden auf der kompakten Menge $\overline{U_\varepsilon(t_0)} \times \overline{U_\varepsilon(x_0)} \times [-c,c]$ stetig sind, sind sie dort auch beschränkt. Es folgt die Endlichkeit der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\ dy,\ \forall (t,x) \in U_\varepsilon(t_0)\times U_\varepsilon(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in U_\varepsilon(t_0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{x\in U_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \forall t \in U_\varepsilon(t_0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{x\in U_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)}{\sqrt{2\pi t}}\right) dy,\ \forall t \in U_\varepsilon(t_0).$$

[4] I. A. für jeden Integrand ein anderes $a$. Da wird nur endliche viele Integranden betrachten, kann man natürlich auch ein für alle gültiges $a$ und $c$ finden.

Da $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ beliebig waren, können wir Ableitung und Integral stets vertausch. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right) = \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\left(\frac{(x-y)^2}{2t^2} - \frac{1}{2t}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right)\left(\frac{-(x-y)}{t}\right) \\ &= \left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right)\left(\frac{(x-y)^2}{t^2} - t^{-1}\right)\end{aligned}$$

zeigt dies aber schon, dass $f$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \frac{\Delta}{2} f(t,x)$ ist.
Schließlich erfüllt $f$ die Randbedingung $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} f(x,t) = g(x_0),\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$: Nach Voraussetzung (bzw. der Bemerkung in Teil 1) ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dy = 1.$[5] Sei $\delta > 0$

$$\begin{aligned} f(x,t) - g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}(g(y) - g(x))}{\sqrt{2\pi t}}\, dy \\ &= \int_{U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}(g(y) - g(x))}{\sqrt{2\pi t}}\, dy + \int_{\mathbb{R}\setminus U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}(g(y) - g(x))}{\sqrt{2\pi t}}\, dy. \end{aligned}$$

Wir schätzen den zweiten Teil wie in der Bemerkung zu Teil (a)[6] ab nach

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\setminus U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}|g(y) - g(x)|}{\sqrt{2\pi t}}\, dy &\le \int_{\mathbb{R}\setminus U_\delta(x)} e^{-\frac{\delta^2}{8t}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{8t}}|g(y) - g(x)|}{\sqrt{2\pi t}}\, dy \\ &\le 2t \int_{\mathbb{R}\setminus U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{8}}|g(y)|}{\sqrt{2\pi}}\, dy. \end{aligned}$$

für $t$ klein genug. Da das Integral wie zuvor endlich ist, konvergiert der gesamte Term gegen 0. Auf dem kompakten Intervall $\overline{U_\delta(x)}$ is $g$ beschränkt, also

$$\begin{aligned} \int_{U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}|g(y) - g(x)|}{\sqrt{2\pi t}}\, dy &\le \sup_{z\in\overline{U_\delta(x)}} |g(z) - g(x)| \int_{U_\delta(x)} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dy \\ &= \sup_{z\in\overline{U_\delta(x)}} |g(z) - g(x)| \underbrace{\int_{U_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}(0)} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dw}_{\le 1,\ \forall t>0.} \\ &\le \sup_{z\in\overline{U_\delta(x)}} |g(z) - g(x)| \to 0. \end{aligned}$$

für $\delta \to 0$. Dabei haben wir die Substitution $w = \frac{y-x}{\sqrt{t}}$ verwendet und dann die Voraussetzung bzw. die Bemerkung aus Teil (a). Schließlich ist die stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{U_\delta(x)}$ schon gleichmäßig stetig und es folgt die Konvergenz.

[5] Substituiere $w = \frac{y-x}{t}$.
[6] Setzte in der Bemerkung $z = t^{-1/2}$.

*Bemerkung:*

(a) Man beachte, dass Fall $(a)$ ein Spezialfall von $(b)$ ist: $g(x) \leq e^x$, $e^x \cdot e^{-\alpha x^2} = e^{\frac{1}{4\alpha}} e^{-\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}, \forall \alpha > 0$ und eine einfache Substitution liefern mit der Bemerkung aus Teil (a) die Behauptung.

(b) Man bemerke, dass wir die Stetigkeit von $g$ nur im letzten Schritt verwendet haben. Tatsächlich gilt für $g \in L^p(\mathbb{R})$[7] mit der Hölder Ungleichung schon $\|e^{-\alpha x^2} g\|_1 \leq \|e^{-\alpha x^2}\|_q \|g\|_p = \|e^{-q\alpha x^2}\|_1^{1/q} \|g\|_p < \infty$, $\forall \alpha > 0$. Wir können also Teil (b) anwenden. Man kann zeigen, dass $f \to g$ in $\|\cdot\|_p$. Für $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ erhält man sogar gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen.

(c) Da wir gesehen haben, dass wir Integral und Ableitung vertauschen können, folgt insbesondere, dass unsere Lösungsfunktion beliebig oft stetig differenzierbar ist auch wenn $g$ nicht differenzierbar war. Mit (ii) sehen wir, dass $f$ auch beliebig oft differenzierbar ist, wenn $g$ nicht einmal stetig war. Schließlich haben wir unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit: Selbst für $g = 1_{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ ist die Lösung $f(x,t) \neq 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(d) Der Beweis lässt sich ohne größere Änderungen auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $n > 1$ übertragen.

**11.7** Studieren Sie den Abschnitt 2.8 “Die Räume $C_b^1$” im Skript.

[7] Man beachte, dass diese Funktionen nicht notwendig Riemann-integrierbar sein müssen. Das Ergebnis gilt allgemein. Für die Rechnung sollte man sich aber (vorerst) auf Funktionen $g$ mit $|g|^p$ Riemann-integrierbar beschränken.