Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 11
28.06.2013

Übungen zur Analysis 2

Für Studenten der Wirtschaftmathematik ist Aufgabe 11.6 von besonderem Interesse, da sie eine Vorbereitung für die die Analyse des Black-Scholes-Modells (später) darstellt.

11.1 Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \arctan(y/x)$. Berechnen Sie den Rückzug f^*dg der Ableitung von g unter der Polarkoordinatenabbildung

$$f : \mathbb{R}^+ \times]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (x, y) = f(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$$

auf zwei verschiedene Weisen:

a) indem Sie $g \circ f$ ausrechnen und dann ableiten;

b) indem Sie die Ableitung von g bilden und diese dann mit df^* zurückziehen.

Schreiben Sie die Rechnung jeweils sowohl in Differentialnotation als auch in Matrixnotation. Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse übereinstimmen. **[10 Punkte]**

11.2 Berechnen Sie den Rückzug f^*dg für folgende Daten (definiert jeweils auf geeigneten offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$):

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = e^{x_1x_2 - x_3}$, $y_2 = e^{x_1x_2+x_3}$, $y_3 = e^{x_2x_3}$ und $dg(y_1, y_2, y_3) = y_2y_3\, dy_1 + y_1y_3\, dy_2 + y_1y_2\, dy_3$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1/(x_1 + x_2 + x_3), x_2/(x_1 + x_2 + x_3), x_1 + x_2 + x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ und $dg(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}[y_3\, dy_1 + 2y_3\, dy_2 + (y_1 + 2y_2)dy_3]$.

Gehen Sie dazu jeweils auf zwei verschiedene Weisen vor:

i) mit direkter Rechnung durch Anwendung der Adjungierten df^* auf dg,

ii) durch Bestimmen einer Funktion g mit der gegebenen Ableitung dg und Berechnen von $d(g \circ f)$.

Überzeugen Sie sich davon, dass die Ergebnisse von i) und ii) übereinstimmen. **[10 Punkte]**

11.3 **Multinomialformel.** Zeigen Sie für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ und für $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ die folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel:

$$(h_1 + \ldots + h_n)^m = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| = m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha.$$

[10 Punkte]

11.4 Entscheiden Sie für folgende Matrizen

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ob sie positiv definit sind

(i) indem Sie das charakteristische Polynom ausrechnen und entscheiden, ob alle Nullstellen davon positiv sind,

(ii) mit Vorzeichen von Unterdeterminanten,

(iii) mit quadratischer Ergänzung. **[10 Punkte]**

11.5 Beweisen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, indem Sie ihre Cholesky-Zerlegung berechnen. **[10 Punkte]**

11.6 Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung. *Lösen Sie entweder die Variante (a) oder die Variante (b) der folgenden Aufgabe.*
Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

(a) $g(x) = \max\{e^x - K, 0\}$ für gegebenes $K > 0$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} |g(x)|\, dx < \infty$ für alle $a > 0$.

Weiter sei

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y)\, dy. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass f die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

löst.
Hinweis:

(a) Zeigen und verwenden Sie hierzu die Formel

$$f(t,x) = e^{x+\frac{t}{2}} \Phi(t^{-1/2}(x + t - \log K)) - K\Phi(t^{-1/2}(x - \log K))$$

mit der Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Die Funktion Φ wird auch "*Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung*" genannt.

(b) Um zu zeigen, dass das Integral (1) mit den partiellen Ableitungen nach x und t vertauscht werden kann, bilden Sie Differenzenquotienten von f und von $\partial f/\partial x$ und vergleichen Sie diese mit dem Integral der entsprechenden partiellen Ableitung des Integranden. Schätzen Sie die Restterme im Integranden mit der Taylorformel ab.

Zeigen Sie, dass die Anfangsbedingung

$$f(x,t) \to g(x_0) \quad \text{für} \quad (x,t) \to (x_0, 0), t > 0$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Hinweise:

(a) Zeigen und verwenden Sie dabei:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ |\Phi(x+y) - \Phi(x)| \le \frac{|y|}{\sqrt{2\pi}}$$

und

$$\lim_{s\to\infty} \Phi(sa) = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0, \\ 1/2 & \text{für } a = 0, \\ 0 & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

(b) Spalten Sie den Integrationsbereich des Integrals

$$f(x,t) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} (g(y) - g(x))\, dy$$

für kleine $\delta > 0$ in die Bereiche $|y - x| > \delta$ und $|y - x| \le \delta$ auf. Beachten Sie, dass der Teil zu $|y - x| > \delta$ im Limes $(x, t) \to (x_0, 0)$, $t > 0$ vernachlässigbar ist.

Sie dürfen die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi},$$

also $\lim_{z\to\infty} \Phi(z) = 1$, ohne Beweis verwenden; wir beweisen sie nämlich in der Analysis 3. **[10 Punkte]**

11.7 Studieren Sie den Abschnitt 2.8 “Die Räume C_b^1” im Skript.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 08.07.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.