MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 10
21.06.2013

Übungen zur Analysis 2

10.1 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, den Punkt $(x_0, y_0) = (3,4)$ mit dem Wert $z_0 = f(x_0,y_0) = 25$ und die Linearisierung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = z_0 + df_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0)$ von f bei (x_0, y_0). Zeichnen Sie die Niveaulinien von f nahe bei (x_0,y_0) mit einem Zirkel und die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0,y_0) mit einem Lineal, z.B. für die Niveaus $z = 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$. Beobachten Sie, wie die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0,y_0) die Niveaukreise von f nahe bei (x_0,y_0) approximieren. **[10 Punkte]**

10.1 Noch mal zur Linearisierung.
Die Arbeit in der Gleichung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o(h)$$

~~im 1-dim~~ oder mit $x = x_0 + h$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + o(x-x_0)$$

im 1-dim oder

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

Vektoren Jacobimatrix Vektormultiplikat.

im mehrdimensionalen.
Die Linearisierung ist immer der rechte Teil der Gleichung

ohne das o.

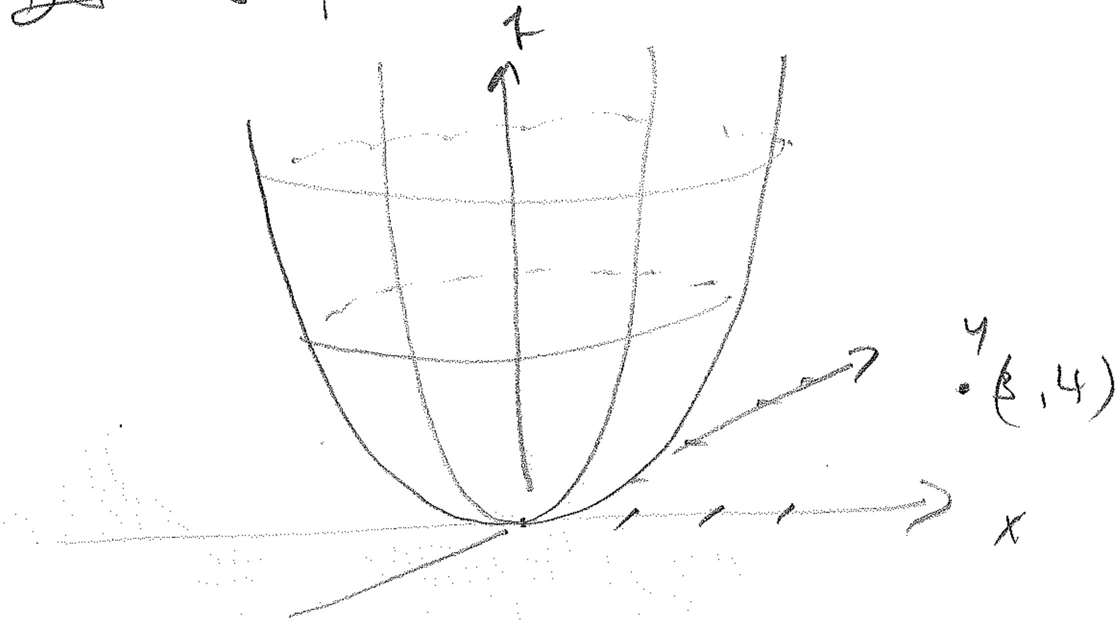
Hier ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, also

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|x-x_0, y-y_0\|)$$

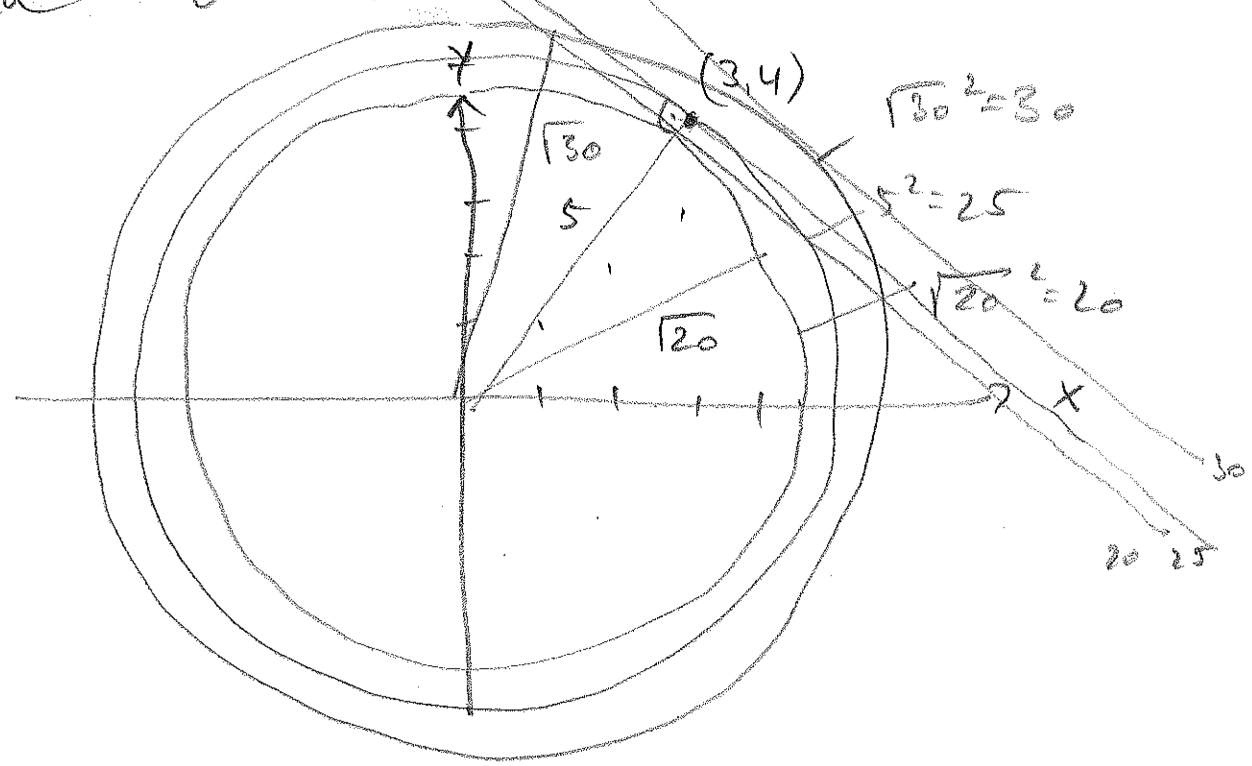
$$= f(3,4) + (2\cdot 3, 2\cdot 4)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} + o(\ )$$

$$= \underbrace{25 + 6(x-3) + 8(y-4)}_{\text{Linearisierung.}} + o(\ )$$

Der Graph von f sieht so aus:



und die Niveaulinien so:



10.2 Berechnen Sie die Jacobimatrix $Df(r,\theta,\phi)$ der Transformation von Kugelkoordinaten nach kartesischen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

10.2.

$$f : (r, \theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$Df = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & +r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir schon dabei sind:

$$|Df| = \cos\theta \cdot r^2\left(\cos\theta\cos^2\varphi\sin\theta + \cancel{r}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$+\ r^2\sin\theta\cdot\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cancel{r}\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$= r^2\left(\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi\right) + r^2\left(\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right)$$
$$= r^2\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\sin^2\varphi = r^2\sin\theta$$

10.3 Eine Formel von Heun. Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit einer beliebig oft (partiell) differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einer beliebig oft differenzierbaren Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Anfangsbedingung $y(0) = b \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir definieren die Näherung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an y durch

$$z(x) = b + xf(x/2, b + xf(0, b)/2).$$

Beweisen Sie, dass die Taylorpolynome 2. Grades von y und von z um $x_0 = 0$ übereinstimmen.
Bemerkung: Aus dieser Formel und Varianten davon gewinnt man durch Iteration numerische Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen von Differentialgleichungen. Mehr dazu in der Numerischen Mathematik. **[10 Punkte]**

Lösung

Sei $h(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{xf(0,b)}{2}\right)$. Nach reeller Ketten- und Produktregel und mehrdimensionaler Kettenregel gilt $z'(x) = f \circ h + x \cdot (Df)(h) \cdot (Dh)(x)$, also

$$z'(x) = f(x/2, b + xf(0, b)/2) + \frac{x}{2}(D_x f + f(0, b)D_y f)(x/2, b + xf(0, b)/2).$$

Entsprechend ergibt sich $z''(x) = 2(Df)h \cdot (Dh)(x) + \frac{x}{4}((D_xD_x + f(0,b)(D_xD_y + D_yD_x) + (f(0,b))^2 D_yD_y)f)(h(x))$. Für eine beliebige Lösung y ist $y''(x) = Df(x, y(x)) = (D_xf, D_yf)(x, y)(1, y'(x))^t$. Auswerten bei 0 liefert

$$z(0) = b = y(0), \quad z'(0) = f(0,b) = y'(0), \quad z''(0) = (D_xf + f(0,b)D_yf)(0,b) = y''(0).$$

10.4 Länge von Kurven in krummlinigen Koordinaten. Ein m-dimensionales Gebilde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ werde durch eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ in Parameterdarstellung $G = f[U]$ gegeben. Weiter sei eine stetig differenzierbare Kurve $k : [a,b] \to U$ gegeben. Wir stellen uns k als eine Beschreibung der Kurve $f \circ k$ "in krummlinigen Koordinaten f" vor. Zeigen Sie, dass die Länge der Kurve $f \circ k$ durch

$$\int_a^b \sqrt{k'(s)^t g(k(s))k'(s)}\, ds$$

gegeben wird, wobei

$$g : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, g(x) = Df(x)^t Df(x).$$

Die matrixwertige Abbildung g wird die *Riemannsche Metrik* zur Parametrisierung f genannt. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik für die Polarkoordinatenabbildung $f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ und für die Kugelkoordinatenabbildung

$$f(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die in Polarkoordinaten durch $r(s) = e^s$, $\phi(s) = s$, $s \in [0,1]$ gegeben wird. **[10 Punkte]**

Lösung

Wir wiederholen zunächst die Definition der Länge einer stetig differenzierbaren Kurve $k : [a,b] \to U$.[1] Ist $U \subset \mathbb{R}$, dann folgt aus Stetigkeit schon gleichmäßige Stetigkeit und somit $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s. d. $|k'(t) - k'(s)| \leq \varepsilon$ für alle t, s mit $|t - s| \leq \delta$. Für $t \in \overline{U_\delta(t')} \subset [a,b], t < t'$ gibt es nach dem Mittelwertssatz ein $s \in [t, t']$ mit $\frac{k(t')-k(t)}{t'-t} = k'(s)$, also $\left|\frac{k(t')-k(t)}{t'-t} - k'(t)\right| = |k'(s) - k'(t)| \leq \varepsilon$. Sei nun $k : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^n$, dann folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ die Existenz eines $c > 0$ s. d. $\left\|\frac{k(t')-k(t)}{t'-t} - k'(t)\right\| \leq c \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left|\frac{k_i(t')-k_i(t)}{t'-t} - k_i'(t)\right| \leq c\varepsilon := \varepsilon'$ für alle t, t' mit $|t - t'| < \delta$.[2]
Sei $\hat{\varepsilon}$ fest. Nach Definition des Integrals (Analysis I, 5.1 und 5.4) gibt es ein $\delta' > 0$ s. d. $\left|\int_b^a \|f'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|(t_i - t_{i-1})\right| \leq \frac{\hat{\varepsilon}}{2}$ für alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b,\ t_i - t_{i-1} \leq \delta', \forall 1 \leq i \leq k$. Wie wir oben gesehen haben gibt es jetzt ein $\hat{\delta} \leq \delta'$ s. d. aus $|t_i - t_{i-1}| < \hat{\delta}$ schon $\left\|\frac{k(t_i)-k(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - k'(t_i)\right\| \leq \frac{\hat{\varepsilon}}{2(b-a)}$, $\forall 1 \leq i \leq n$ folgt. Nach Multiplikation mit $t_i - t_{i-1}$ und aufsummieren liefern unsere beiden Abschätzungen und die Dreiecksungleichung schon $\left|\sum_{i=1}^k \|k(t_i) - k(t_{i-1})\| - \int_b^a \|k'(t)\| dt\right| \leq \frac{\hat{\varepsilon}\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2} = \hat{\varepsilon}$. Der linke Term konvergiert mit zunehmender Feinheit der Zerlegung gegen die Länge, d. h. $L(k) = \int_b^a \|k'(t)\| dt \leq (b-a) \max_{t \in [a,b]} \|k'(t)\| < \infty$.
Zur eigentlichen Aufgabe: f ist stetig-differenzierbar, also ist $f \circ k$ stetig differenzierbare Kurve. Nach der Kettenregel gilt $D(f \circ k)(s) = (Df)(k(s))k'(s)$ und $L(f \circ k) = \int_a^b \sqrt{k'(s)^t g(k(s))k'(s)}\, ds$ folgt aus der Definition der Standardnorm.
Für $f_P(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ ist wegen $(Df)(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}$ die Riemannsche Metrik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

[1] vgl. Forster, Analysis II, §4, Satz 1.

[2] Für alle ε' definiere $\varepsilon := \varepsilon'/c$ und finde δ mit gleichmäßiger Stetigkeit der maximalen Koeffizientenkurve k_j.

Entsprechend gilt für $f_K(r,\theta,\phi) := (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

$$(Df_K)(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Riemannsche Metrik hat dann die Form[3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Für die Kurve $\gamma : s \mapsto f_P(r(s),\phi(s)) = f_P(e^s, s) \subset \mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$(e^s, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^s \\ 1 \end{pmatrix} = 2e^{2s} \Rightarrow L(\gamma) = e\sqrt{2}.$$

10.5 Rotationsinvarianz des Laplaceoperators Es seien $n \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $U : \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $U^tU = \mathrm{Id}$ oder äquivalent $\forall x \in \mathbb{R}^n :\ \|Ux\|_2 = \|x\|_2$. Weiter sei $UV := \{Ux|\ x \in V\}$ und $g \in C^2(UV,\mathbb{R})$ und $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(Ux)$. Zeigen Sie für alle $x \in V$: $\Delta f(x) = \Delta g(Ux)$. **[10 Punkte]**

Lösung

Aus der Kettenregel folgt für $j = 1,\ldots,n$ wegen $\partial_j \sum_{l=1}^n U_{kl}x_l = U_{kj}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(Ux) = \sum_{k=1}^n D_k g(Ux) \frac{\partial}{\partial x_j}(Ux)_k = \sum_{k=1}^n U_{kj}\, D_k g(Ux)\,,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g(Ux) = \sum_{k=1}^n U_{kj} \sum_{l=1}^n D_l D_k g(Ux) \frac{\partial}{\partial x_j}(Ux)_l = \sum_{k,l=1}^n D_l D_k g(Ux) U_{kj} (U^t)_{jl}\ ,$$

wobei wir $U_{lj} = (U^t)_{jl}$ benutzt haben. Wegen $U^t = U^{-1}$ gilt somit für alle $x \in V$

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g(Ux) = \sum_{k,l=1}^n D_l D_k g(Ux) \sum_{j=1}^n U_{kj}(U^{-1})_{jl}$$
$$= \sum_{k,l=1}^n D_l D_k g(Ux)\, \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n D_l^2 g(Ux) = \Delta g(Ux)$$

10.6 Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten. Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\mathbb{C})$ und $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie:

$$\Delta f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\phi)$$

Bemerkung: Mit mehr Hilfsmitteln können wir später in der Analysis 3 die Transformation des Laplaceoperators in beliebige krummlinige Koordinaten in n Dimensionen recht einfach beschreiben. **[10 Punkte]**

[3] Nutze Symmetrie und $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Lösung

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\phi) &= D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos\phi + D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\phi \\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\phi) &= D_1^2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(\cos\phi)^2 + D_2 D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\cos\phi\sin\phi \\
&\quad + D_1 D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\sin\phi\cos\phi + D_2^2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(\sin\phi)^2 \\
\frac{\partial g}{\partial \phi}(r,\phi) &= -D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\sin\phi + D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\cos\phi \\
\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r,\phi) &= -\left(\frac{\partial}{\partial\phi} D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\right) r\sin\phi - D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\cos\phi \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial\phi} D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\right) r\cos\phi - D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\sin\phi \\
&= D_1^2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(r\sin\phi)^2 - D_2 D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r^2\sin\phi\cos\phi \\
&\quad - D_1 D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r^2\cos\phi\sin\phi + D_2^2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,(r\cos\phi)^2 \\
&\quad - D_1 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\cos\phi - D_2 f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, r\sin\phi\ ,
\end{aligned}
$$

und somit, wegen $1 = (\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2$,

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial^2\phi}(r,\phi) = \Delta f(r\cos\phi, r\sin\phi) - \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\phi)\,.
$$

10.7 Studieren Sie den Abschnitt 2.4 (Veranschaulichung der Ableitung mit Tangentialräumen) im Skript.