Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 10
21.06.2013

Übungen zur Analysis 2

10.1 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, den Punkt $(x_0, y_0) = (3, 4)$ mit dem Wert $z_0 = f(x_0, y_0) = 25$ und die Linearisierung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = z_0 + df_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0)$ von f bei (x_0, y_0). Zeichnen Sie die Niveaulinien von f nahe bei (x_0, y_0) mit einem Zirkel und die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0, y_0) mit einem Lineal, z.B. für die Niveaus $z = 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$. Beobachten Sie, wie die Niveaugeraden von g nahe bei (x_0, y_0) die Niveaukreise von f nahe bei (x_0, y_0) approximieren. **[10 Punkte]**

10.2 Berechnen Sie die Jacobimatrix $Df(r, \theta, \phi)$ der Transformation von Kugelkoordinaten nach kartesischen Koordinaten

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

[10 Punkte]

10.3 Eine Formel von Heun. Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit einer beliebig oft (partiell) differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einer beliebig oft differenzierbaren Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Anfangsbedingung $y(0) = b \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir definieren die Näherung $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an y durch

$$z(x) = b + xf(x/2, b + xf(0, b)/2).$$

Beweisen Sie, dass die Taylorpolynome 2. Grades von y und von z um $x_0 = 0$ übereinstimmen.
Bemerkung: Aus dieser Formel und Varianten davon gewinnt man durch Iteration numerische Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen von Differentialgleichungen. Mehr dazu in der Numerischen Mathematik. **[10 Punkte]**

10.4 Länge von Kurven in krummlinigen Koordinaten. Ein m-dimensionales Gebilde $G \subseteq \mathbb{R}^n$ werde durch eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ in Parameterdarstellung $G = f[U]$ gegeben. Weiter sei eine stetig differenzierbare Kurve $k : [a, b] \to U$ gegeben. Wir stellen uns k als eine Beschreibung der Kurve $f \circ k$ “in krummlinigen Koordinaten f” vor. Zeigen Sie, dass die Länge der Kurve $f \circ k$ durch

$$\int_a^b \sqrt{k'(s)^t g(k(s)) k'(s)}\, ds$$

gegeben wird, wobei

$$g : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, g(x) = Df(x)^t Df(x).$$

Die matrixwertige Abbildung g wird die *Riemannsche Metrik* zur Parametrisierung f genannt. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik für die Polarkoordinatenabbildung $f(r, \phi) = (r \cos\phi, r \sin\phi)$ und für die Kugelkoordinatenabbildung

$$f(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kurve, die in Polarkoordinaten durch $r(s) = e^s$, $\phi(s) = s$, $s \in [0, 1]$ gegeben wird. **[10 Punkte]**

10.5 **Rotationsinvarianz des Laplaceoperators** Es seien $n \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $U : \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $U^t U = \mathrm{Id}$ oder äquivalent $\forall x \in \mathbb{R}^n : \; \|Ux\|_2 = \|x\|_2$. Weiter sei $UV := \{Ux | \; x \in V\}$ und $g \in C^2(UV, \mathbb{R})$ und $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(Ux)$. Zeigen Sie für alle $x \in V$: $\Delta f(x) = \Delta g(Ux)$. **[10 Punkte]**

10.6 **Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten.** Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ und $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$. Zeigen Sie:

$$\Delta f(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(r, \phi)$$

Bemerkung: Mit mehr Hilfsmitteln können wir später in der Analysis 3 die Transformation des Laplaceoperators in beliebige krummlinige Koordinaten in n Dimensionen recht einfach beschreiben. **[10 Punkte]**

10.7 Studieren Sie den Abschnitt 2.4 (Veranschaulichung der Ableitung mit Tangentialräumen) im Skript.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 01.07.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.