Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 9
14.06.2013

Übungen zur Analysis 2

9.1 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass die Fourier-Partialsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ und

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

für $n \to \infty$ *gleichmäßig* gegen f konvergiert.
Hinweis: Integrieren Sie partiell und verwenden Sie die Besselsche Ungleichung für f' und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k| < \infty$ zu zeigen. **[10 Punkte]**

Lösung

Aufgrund der Periodizität von f genügt es, die Aussage für f eingeschränkt auf $[0, 2\pi]$ zu zeigen. Die Fourier-Analyse $\mathcal{F}$ aus Definition 1.190 der Vorlesung, die f ihre Fourier-Koeffizienten $f_k = \langle e_k, f\rangle$ zuordnet, d.h. $\mathcal{F}(f) = (\langle e_k, f\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$, ist nach Satz 1.191 eine Bijektion. Hierbei wurde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \ .$$

Es gilt $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k, f\rangle\, e_k$, wobei die Konvergenz der Reihe in $(L^2([0, 2\pi]), \|\cdot\|_2)$ zu verstehen ist. Wir wollen zeigen, dass die Reihe sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Angenommen, die Folge $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $C([0, 2\pi])$, definiert durch

$$S_m(x) \ := \ \sum_{k=-m}^{m} f_k\, e^{ikx} \ = \ \sum_{k=-m}^{m} \langle e_k, f\rangle\, e_k(x)\,,$$

konvergiert für $m \to \infty$ gleichmäßig gegen ein $g \in L^2([0, 2\pi])$, also $\|S_m - g\|_\infty \to 0$. Wegen $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_m(x) - g(x)|^2 \leqslant \|S_m - g\|_\infty^2$ konvergiert S_m dann auch in $(L^2, \|\cdot\|_2)$ gegen g. Aufgrund der Eindeutigkeit von Grenzwerten ($\|f - g\|_2 \leqslant \|f - S_m\|_2 + \|S_m - g\|_2$) gilt in diesem Fall also $f = g$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Partialsummen S_m folgt somit bereits die gleichmäßige Konvergenz gegen f.

Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der S_m. Zeigen wir zunächst $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle e_k, f\rangle| < \infty$. Wegen $f \in C^1(\mathbb{R})$, folgt mittels partieller Integration für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$\langle e_k, f\rangle \ = \ -\left.\frac{e^{ikx} f(x)}{2\pi ik}\right|_{x=0}^{x=2\pi} + \ \frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x)\, dx\,.$$

Also, $|\langle e_k, f\rangle| = \frac{1}{k}\,|\langle e_k, f'\rangle|$, da $f(2\pi) = f(0)$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\langle e_k, f\rangle| \;\leqslant\; \Big(2\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\langle e_k, f'\rangle|^2\Big)^{1/2} \;\leqslant\; C\,\|f'\|_2 \;<\; \infty\,,$$

wobei wir im letzten Schritt $C := 2\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2} < \infty$ gesetzt und die Besselsche Ungleichung für f' benutzt haben. Es folgt

$$\Big|S_m(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k, f\rangle\, e_k(x)\Big| \;\leqslant\; \sum_{|k|>m} |\langle e_k, f\rangle| \;\xrightarrow{m\to\infty}\; 0$$

Da die rechte Seite unabhängig von x ist, konvergiert $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

9.2 Reelle Version der Fourierreihe. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx) f(x)\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx) f(x)\,dx \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ in $(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_2)$ gegen f konvergieren.
Hinweis: Drücken Sie a_k, b_k und c_0 mit den komplexen Fourierkoeffizienten

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

aus und folgern Sie

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Unter der Zusatzvoraussetzung, dass f *stetig differenzierbar* ist, folgt aus aus der vorhergehenden Übung auch *gleichmäßige* Konvergenz der reellen Version der Fourierreihe, also Konvergenz in $(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$. **[10 Punkte]**

Lösung

Es ist $c_0 = f_0$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx) f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} f(x)\,dx = f_k + f_{-k}$ und $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx) f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i} f(x)\,dx = if_k - if_{-k}$. Es folgt

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f_0 + \sum_{k=1}^{n} [(f_k + f_{-k})\cos(kx) + i(f_k - f_{-k})\sin(kx)] \\ &= f_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k e^{ikx} + f_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}, \end{aligned}$$

wobei wir $\cos(kx) = \cos(-kx)$ und $\sin(-kx) = -\sin(kx)$ verwendet haben. Es ist für $l \leq n$: $\mathcal{F}(g_n)_l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ilx} g_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ilx}}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{f_k e^{i(k-l)x}\,dx}{2\pi} = f_l$, d. h. $\lim_{n\to\infty} g_n = \mathcal{F}^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}(f_k \cdot 1_{k\leq n})\right) = \mathcal{F}^{-1}\left((f_k)_{k\in\mathbb{Z}}\right) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$.

9.3 Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$,

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$ mit gegebenem $a \in \mathbb{R}^n$, wobei $\langle .,. \rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet,

(c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ mit gegebenem $\alpha \in \mathbb{R}$,

(d) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\langle a,x\rangle}{\|x\|_2^3}$ mit gegebenem $a \in \mathbb{R}^n$. **[10 Punkte]**

Lösung

(a) Für $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= \frac{y-x}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)} \\
\partial_y f(x,y,z) &= \frac{x-y}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)} \\
\partial_z f(x,y,z) &= -\frac{z^{-3/2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-y)^2/(2z)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \frac{(x-y)^2}{2z^2} e^{-(x-y)^2/(2z)}
\end{aligned}$$

und somit

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{f(x,y,z)}{z} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \\ \frac{(x-y)^2}{2z} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Mit der Notation $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\partial_i = \partial/\partial x_i$, gilt für $f = \langle a, \cdot\rangle$

$$\partial_i f(x) = \partial_i \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{ki} = a_i\,,$$

also $\nabla f = a$.

(c) Für $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|_2^\alpha$ gilt wegen $\|x\|_2^\alpha = \exp(\alpha \ln \|x\|_2)$

$$\nabla f(x) = \|x\|_2^\alpha \frac{\alpha}{\|x\|_2} \frac{x}{\|x\|_2} = \alpha \|x\|_2^{\alpha-2} x$$

wobei wir $\nabla\|x\|_2 = \|x\|_2^{-1} x$ (Beispiel 2.4) benutzt haben.

(d) Aus (b) und (c) folgt für $f(x) = \langle a, x\rangle\, \|x\|_2^{-3}$, dass $\partial_i f(x) = a_i \|x\|_2^{-3} - 3\langle a,x\rangle \|x\|_2^{-5} x_i$. Also

$$\nabla f = \|x\|_2^{-3} \Big(a - 3\|x\|_2^{-2} \langle a, x\rangle\, x \Big)$$

9.4 Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(a,b,c) = \int_a^b e^{-cx^2}\,dx$. Im Ergebnis darf zwar ein Integral, aber keine Ableitung stehen. **[10 Punkte]**

Solution

We first calculate the partial derivatives of the function $f(a,b,c) = \int_a^b e^{-cx^2}dx$.

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} = -e^{ca^2}, \quad D_2 f = \frac{\partial f}{\partial b} = e^{cb^2},$$

and using Lemma 2.7

$$D_3 f = \frac{\partial f}{\partial c} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial c} e^{-cx^2} dx = -\int_a^b x^2 e^{-cx^2} dx.$$

Thus,

$$\nabla f = \begin{pmatrix} D_1 f \\ D_2 f \\ D_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{ca^2} \\ e^{cb^2} \\ -\int_a^b x^2 e^{-cx^2} dx \end{pmatrix}.$$

9.5 Es sei $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2^{2-d}$. Beweisen Sie $\Delta f = 0$. Insbesondere gilt in drei Dimensionen

$$\Delta \frac{1}{\|x\|_2} = 0.$$

[10 Punkte]

Solution

$$\begin{aligned}
\Delta \|x\|_2^{2-d} &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{\frac{2-d}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (2-d) x_i (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{-\frac{d}{2}} \\
&= (2-d) \sum_{i=1}^d \|x\|_2^{-d} + d(d-2) \sum_{i=1}^d x_i^2 (x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{-\frac{d+2}{2}} \\
&= d(2-d)\|x\|_2^{-d} + d(d-2)\|x\|_2^{-d} = 0.
\end{aligned}$$

In particular for $d = 3$, $\Delta \frac{1}{\|x\|_2} = 0$.

9.6 Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}},$$

Zeigen Sie, dass f die “Wärmeleitungsgleichung”

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{1}{2} \Delta f(x,t)$$

löst, wobei sich hier der Laplaceoperator nur auf $x = (x_1, \ldots, x_n)$, nicht jedoch auf t bezieht. Versuchen Sie sich im Fall $n = 1$ anschaulich vorzustellen, dass f “zerfließende Gaußsche Glocken” beschreibt, indem Sie $x \mapsto f(x,t)$ für verschiedene t grob skizzieren. **[10 Punkte]**

Solution

We compute $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ and $\Delta f(x,t)$ for the function $f(x,t)$,

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \left(\frac{-n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} + \frac{\|x\|_2^2}{2} t^{-\frac{n+4}{2}} \right) e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}},$$

and

$$\begin{aligned} \Delta f(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} &= -t^{-\frac{n+2}{2}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} \\ &= -nt^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} + t^{-\frac{n+4}{2}} \|x\|_2^2 e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Thus, $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{1}{2} \Delta f(x,t)$.