Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 9
14.06.2013

Übungen zur Analysis 2

9.1 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass die Fourier-Partialsumme

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ und

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

für $n \to \infty$ *gleichmäßig* gegen f konvergiert.
Hinweis: Integrieren Sie partiell und verwenden Sie die Besselsche Ungleichung für f' und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k| < \infty$ zu zeigen. **[10 Punkte]**

9.2 **Reelle Version der Fourierreihe.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) f(x)\, dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) f(x)\, dx$$

für $n \to \infty$ in $(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_2)$ gegen f konvergieren.
Hinweis: Drücken Sie a_k, b_k und c_0 mit den komplexen Fourierkoeffizienten

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

aus und folgern Sie

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Unter der Zusatzvoraussetzung, dass f *stetig differenzierbar* ist, folgt aus aus der vorhergehenden Übung auch *gleichmäßige* Konvergenz der reellen Version der Fourierreihe, also Konvergenz in $(C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$. **[10 Punkte]**

9.3 Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen:

(a) $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{-(x-y)^2/(2z)}$,

(b) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\langle a,x\rangle$ mit gegebenem $a\in\mathbb{R}^n$, wobei $\langle .,.\rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet,

(c) $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|_2^\alpha$ mit gegebenem $\alpha\in\mathbb{R}$,

(d) $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\langle a,x\rangle}{\|x\|_2^3}$ mit gegebenem $a\in\mathbb{R}^n$. **[10 Punkte]**

9.4 Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktion $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(a,b,c)=\int_a^b e^{-cx^2}\,dx$. Im Ergebnis darf zwar ein Integral, aber keine Ableitung stehen. **[10 Punkte]**

9.5 Es sei $f:\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|_2^{2-d}$. Beweisen Sie $\Delta f=0$. Insbesondere gilt in drei Dimensionen

$$\Delta\frac{1}{\|x\|_2}=0.$$

[10 Punkte]

9.6 Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad f(x,t)=\frac{1}{t^{n/2}}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}},$$

Zeigen Sie, dass f die "Wärmeleitungsgleichung"

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=\frac{1}{2}\Delta f(x,t)$$

löst, wobei sich hier der Laplaceoperator nur auf $x=(x_1,\dots,x_n)$, nicht jedoch auf t bezieht. Versuchen Sie sich im Fall $n=1$ anschaulich vorzustellen, dass f "zerfließende Gaußsche Glocken" beschreibt, indem Sie $x\mapsto f(x,t)$ für verschiedene t grob skizzieren. **[10 Punkte]**

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 24.06.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.