

Übungen zur Analysis 2

8.1 Kompaktheit der euklidischen Einheitssphäre.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die euklidische Einheitssphäre. Zeigen Sie: S^n ist kompakt in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Folgern Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Menge

$$M = \{f(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ein Minimum und ein Maximum besitzt.

[10 Punkte]

Lösung

(a) Da die Normabbildung $\|\cdot\|_2$ stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist, ist S^n als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter $\|\cdot\|_2$ selbst abgeschlossen (bzgl. der Standardtopologie, die durch $\|\cdot\|_2$ erzeugt wird). Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ (Satz 1.169), ist somit S^n auch bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ abgeschlossen. Weiter gibt es ein $C > 0$, sodass für alle $x \in S^n$ gilt

$$\|x\|_\infty \leq C \|x\|_2 = C < \infty$$

Also ist S^n bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ auch beschränkt, und somit (Korollar 1.167) kompakt in der durch $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Topologie. Die Kompaktheit in der Standardtopologie folgt dann wieder aus $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_2} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}$.

(b) Wegen $M = f(S^3)$, gibt es für jedes $b \in M$ ein $x \in S^3$, sodass

$$\|b\|_2 = \|f(x)\|_2 \leq \sup_{x \in S^3} \|f(x)\|_2 =: m$$

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in S^3 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\|_2 = \sup_{x \in S^3} \|f(x)\|_2$. Da S^3 nach (a) bzgl. $\|\cdot\|_2$ folgenkompakt ist (aufgrund der metrischen Charakterisierung der Kompaktheit aus Satz 1.166) gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x_0 \in S^3$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von f und $\|\cdot\|_2$, und da $(\|f(x_{n_k})\|_2)_k$ als Teilfolge einer konvergenten Folge den gleichen Grenzwert m besitzt, folgt

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_{n_k})\|_2 = \|f(x_0)\|_2$$

Also ist $\|f(x_0)\|_2 = \max_{b \in M} \|b\|_2$, das heißt M besitzt ein Maximum $b_0 \in M$, nämlich $b_0 = f(x_0)$. Genauso sieht man auch die Existenz eines Minimums.

8.2 Stetigkeit linearer Abbildungen auf $\mathbb{R}^m$. Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^m$ und $\|\cdot\|'$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Weiter sei $L : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $L : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|')$ stetig ist.

[10 Punkte]

Lösung

Sei $(e_k)_{k=1}^m$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^m$, und wähle $c > 0$ mit $\|\cdot\|_\infty \leq c \|\cdot\|$ (wieder Satz 1.169). Dann gilt

$$\|L(x)\|' = \left\| \sum_{k=1}^m x_k L(e_k) \right\|' \leq \sum_{k=1}^m |x_k| \|L(e_k)\|' \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^m \|L(e_k)\|' \leq C \|x\|$$

wobei wir $C := c \sum_{k=1}^m \|L(e_k)\|'$ gesetzt haben. Somit ist L nach Lemma 1.63 (Charakterisierung der Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen normierten Räumen) stetig.

8.3 Zeigen Sie:

- (a) Der Abschluss $\overline{A}$ einer totalbeschränkten Teilmenge $A \subseteq M$ in einem halbmetrischen Raum (M, d) ist totalbeschränkt.
- (b) Die Vervollständigung eines totalbeschränkten halbmetrischen Raums ist kompakt.
- (c) **Anwendung in der Zahlentheorie:** Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ kompakt ist, indem Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich d_p totalbeschränkt ist. [10 Punkte]

Lösung

- (a) Sei E_ε jeweils eine endliche Menge, so dass $A \subset \bigcup_{x \in E_\varepsilon} U_\varepsilon(x)$. Sei $y \in \overline{A}$, dann gilt für alle $\delta > 0 \exists x \in E_{\varepsilon/2} : U_\delta(y) \cap U_{\varepsilon/2}(x) \neq \emptyset$. Für $\delta = \varepsilon/2$ folgt mit der Dreiecksungleichung $y \in U_\varepsilon(x)$, also $\overline{A} \subset \bigcup_{x \in E_{\varepsilon/2}} U_\varepsilon(x)$.
- (b) Sei $\hat{M}$ die Vervollständigung, $i : M \rightarrow \hat{M}$ die isometrische Einbettung. Wegen Isometrie ist $i(M)$ totalbeschränkt, nach Teil (a) $\overline{i(M)} = \hat{M}$ ebenfalls totalbeschränkt und somit nach 1.166 kompakt.
- (c) Nach Teil (a) & (b) genügt es zu zeigen, dass $(\mathbb{Z}, d_p)$ totalbeschränkt ist. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : p^{-n} < \varepsilon$. Sei $E = \{0, 1, \dots, p^n - 1\}$, dann gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$, $a = mp^n + q$, $q \in E$ und $\text{dist}_{d_p}(a, E) \leq d_p(a, q) = p^{-n} < \varepsilon$.

8.4 Es sei

$$M = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1, \forall x, y \in [0, 1] : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$$

der Raum aller durch 1 beschränkten, global Lipschitz-stetigen Funktionen mit Lipschitzkonstante 1. Zeigen Sie, dass M in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen und totalbeschränkt und damit kompakt ist. [10 Punkte]

Solution

We first prove that the set $M \subset (C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ is a closed subset. Let $\{f_n\}$ be a sequence in M converging to an element $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. We show that $f \in M$. For every $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_0$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Therefore,

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon,$$

and

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |x - y| + 2\|f_n - f\|_\infty \leq |x - y| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Since the above inequalities are true for every $\varepsilon > 0$, thus, $\|f\|_\infty \leq 1$ and $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. In conclusion, M is a closed set. Moreover, M is complete because $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ is a complete metric space (see for example Proposition 107) and a closed subset of a complete metric space is also complete.

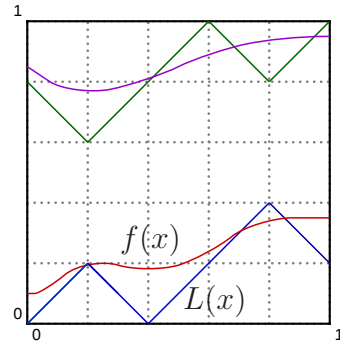
Second, we show that M is totally bounded. For every $\varepsilon > 0$ and every $f \in M$ let construct a piecewise linear function L as follows. There exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. For every $0 \leq m \leq n$, we define $L(\frac{m}{n}) = \frac{k}{n}$, where $\frac{k}{n} \leq f(\frac{m}{n}) < \frac{k+1}{n}$ and then we join $(\frac{m}{n}, L(\frac{m}{n}))$ and $(\frac{m+1}{n}, L(\frac{m+1}{n}))$ by a linear function. The slope of L on each interval $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ is $-1, 0$ or 1 . Indeed, $|f(\frac{m+1}{n}) - f(\frac{m}{n})| \leq \frac{1}{n}$ and thus $\frac{k'}{n} \leq f(\frac{m+1}{n}) < \frac{k'+1}{n}$, where k' is equal to $k, k+1$ or $k-1$. Therefore, $L(\frac{m+1}{n}) - L(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$ or $-\frac{1}{n}$ or 0 . Due to the construction of L we shall see that $\|f - L\|_\infty \leq 3\varepsilon$ (see examples shown in the figure below with $\varepsilon = \frac{1}{5}$). For every $x \in [0, 1]$ take $m \in \{0, \dots, n\}$ such that $x \in [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$. Hence

$$|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - f(\frac{m}{n})| + |L(x) - L(\frac{m}{n})| + |L(\frac{m}{n}) - f(\frac{m}{n})| \leq \frac{3}{n} \leq 3\varepsilon.$$

For each $n \in \mathbb{N}$, one can check that there is a finite number of the piecewise linear functions constructed in the above fashion (the number is less than $(n+1)3^n$). Therefore for every $\varepsilon > 0$

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} U_{3\varepsilon}(L_i),$$

where L_i are continuous piecewise linear functions which are linear on each interval $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$, with $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ and with the slope ± 1 or 0 . In the above inclusion $n_0 < (2n+1)3^n$, where $2n+1$ stands for the number of initial value of these family of piecewise linear functions and then at each step we have at most three choice for their slopes. It shows that M is totally bounded.



Now use Proposition 1.166, M is compact if and only if it is complete and totally bounded.

8.5 Satz von Stone-Weierstraß – komplexe Version. Gegeben seien ein nichtleerer kompakter Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$ und eine Menge $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Die konstante Funktion $1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Wert 1 ist ein Element von A .
- (b) Für alle $f, g \in A$ ist $f + g \in A$.
- (c) Für alle $f \in A$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f \in A$.
- (d) Für alle $f, g \in A$ ist $f \cdot g \in A$.
- (e) Für alle $f \in A$ ist $\bar{f} \in A$, wobei $\bar{f}$ das konjugiert Komplexe von f bezeichnet.
- (f) A ist punktetrennend.

Zeigen Sie, dass dann A dicht in $(C(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\text{Re } A = \{\text{Re } f \mid f \in A\}$ die Voraussetzungen der reellen Version des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt, und dass $\{\text{Re } f \mid f \in A\} = \{\text{Im } f \mid f \in A\}$ gilt. Erinnern Sie sich dazu an $\text{Re } f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ und $\text{Im } f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$. **[10 Punkte]**

8.5. Das Ziel dieses Aufgabs
ist die Dichtkeits von A in

$C((x, \infty) \parallel \infty)$. D.h., dass es
für jede stetige Fkt $f: x \rightarrow \mathbb{R}$
eine Folge (f_n) in A gibt,
so dass (f_n) glw. nach f
konvergiert.

Weil wir auf Funktionen in $C(x, \mathbb{R})$
zurückverknüpfen wollen, ist es
zweckmäßig, $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$
durch reellwertige Fkt. zu approx.

D.h.: Haben wir $(g_n), (h_n)$ in
 A gefunden mit $g_n \xrightarrow{\text{glw.}} \operatorname{Re} f$
und $h_n \xrightarrow{\text{glw.}} \operatorname{Im} f$, sind wir fertig.

Auf den 1. Blick sieht es so aus,
als würde die Axiome (a) - (f)

$\operatorname{Im}(g_n) = \operatorname{Im}(h_n) = 0$ und

der kompl. Version des Satzes
die Axiome 1.-5. der reellen
Version impliziert. (Damit wären wir
fertig) Aber Vorsicht:
Aus (1) folgt zunächst nicht
5. ! (1) garantiert eine Fkt

$g \in A$ mit $g(x) \neq g(y)$, aber
dieses g muss nicht reell sein,
also $\ln(g) = 0$ muss nicht sein.

Hier greift der Hinweis!

Für $g + \bar{g} \stackrel{(e)}{\in} A$ gilt $\ln(g + \bar{g}) = 0$.
ist tatsächlich 5.

Damit ist (a) - (f) implizieren
erfüllt, den gesamten reellen Fall, wir
können also $\Re(f)$ und $\ln(f)$
durch (g_n) und (h_n) approximieren
und damit f durch $\underbrace{(g_n + i \cdot h_n)}_{\in A}$.

8.6 Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

indem Sie beide Seiten der Parseval-Gleichung für die "Dreiecksfunktion" $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$ und $f(x) = 2\pi - x$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$ ausrechnen. [10 Punkte]

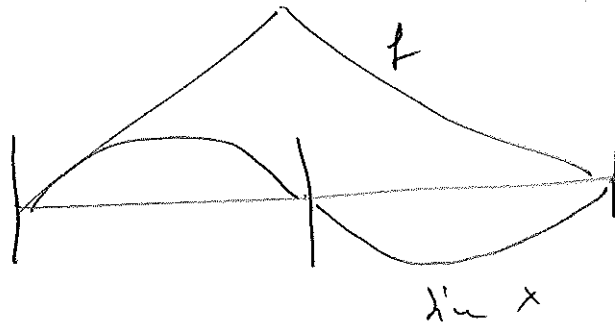
8.6.

Mit
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

erhalten wir bei:

$$\int_0^{2\pi} \sin(ux) f(x) dx = 0,$$

weil $\sin(\pi - ux) = -\sin(\pi + ux)$



Für $u \neq 0$ gilt: (weil $\cos(\pi - ux) = \cos(\pi + ux)$)

$$\int_0^{2\pi} \cos(ux) f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(ux) f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} x \cos ux \, dx = 2 \left(\frac{1}{u} x \sin ux + \frac{1}{u^2} \cos ux \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{u^2} & u \text{ ungerade} \\ 0 & u \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\text{Also } \langle f, e^{inx} \rangle = \begin{cases} -\frac{2}{\pi u^2} & \text{ung.} \\ 0 & \text{ger.} \end{cases} \neq 0$$

$$\text{und } \langle f, e^0 \rangle = \frac{\pi}{2}$$

Die Fourierreihe von f ist also

$$\langle f, e^{inx} \rangle = \dots, 0, \frac{-2}{\pi}, \frac{\pi}{2}, \frac{-2}{\pi}, 0, \frac{-2}{\pi 3^2}, 0, \dots$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
 $n=0 \quad n=1$

und

$$(\langle f, e^{inx} \rangle)^2 = \dots, 0, \frac{4}{\pi^2}, \frac{\pi^2}{4}, \frac{4}{\pi^2}, 0, \frac{4}{\pi^2 3^4}, \dots$$

Andererseits gilt

$$\langle f, f \rangle = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi^3 \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Parseval liefert

$$\frac{1}{3} \pi^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e^{inx} \rangle|^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96}$$

$$= \frac{\pi^4}{90} \quad \left(\text{p.s. ich hab mich} \right. \\ \left. \infty \text{ Mal verrechnet,} \right. \\ \left. \text{b's es jetzt hat} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \text{;) } \end{pmatrix} \right)$$