Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 8
07.06.2013

# Übungen zur Analysis 2

**8.1 Kompaktheit der euklidischen Einheitssphäre.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_2 = 1\}$ die euklidische Einheitssphäre. Zeigen Sie: $S^n$ ist kompakt in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Folgern Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Menge

$$M = \{f(x, y, z) | \; x, y, z \in \mathbb{R}, \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ein Minimum und ein Maximum besitzt. **[10 Punkte]**

**8.2 Stetigkeit linearer Abbildungen auf $\mathbb{R}^m$.** Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^m$ und $\| \cdot \|'$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Weiter sei $L : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $L : (\mathbb{K}^m, \| \cdot \|) \to (\mathbb{K}^n, \| \cdot \|')$ stetig ist. **[10 Punkte]**

**8.3** Zeigen Sie:

(a) Der Abschluss $\overline{A}$ einer totalbeschränkten Teilmenge $A \subseteq M$ in einem halbmetrischen Raum $(M, d)$ ist totalbeschränkt.

(b) Die Vervollständigung eines totalbeschränkten halbmetrischen Raums ist kompakt.

(c) **Anwendung in der Zahlentheorie:** Es sei $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ kompakt ist, indem Sie zeigen, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich $d_p$ totalbeschränkt ist. **[10 Punkte]**

**8.4** Es sei

$$M = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) | \; \|f\|_\infty \leq 1, \forall x, y \in [0, 1] : \; |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$$

der Raum aller durch 1 beschränkten, global Lipschitz-stetigen Funktionen mit Lipschitzkonstante 1. Zeigen Sie, dass $M$ in $(C([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ abgeschlossen und totalbeschränkt und damit kompakt ist. **[10 Punkte]**

**8.5 Satz von Stone-Weierstraß – komplexe Version.** Gegeben seien ein nichtleerer kompakter Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$ und eine Menge $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die konstante Funktion $1 : X \to \mathbb{R}$ mit dem Wert 1 ist ein Element von $A$.

(b) Für alle $f, g \in A$ ist $f + g \in A$.

(c) Für alle $f \in A$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f \in A$.

(d) Für alle $f, g \in A$ ist $f \cdot g \in A$.

(e) Für alle $f \in A$ ist $\overline{f} \in A$, wobei $\overline{f}$ das konjugiert Komplexe von $f$ bezeichnet.

(f) $A$ ist punktetrennend.

Zeigen Sie, dass dann $A$ dicht in $(C(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.
*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f \mid f \in A\}$ die Voraussetzungen der reellen Version des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt, und dass $\{\operatorname{Re} f \mid f \in A\} = \{\operatorname{Im} f \mid f \in A\}$ gilt. Erinnern Sie sich dazu an $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$. **[10 Punkte]**

**8.6** Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

indem Sie beide Seiten der Parseval-Gleichung für die "Dreiecksfunktion" $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$ und $f(x) = 2\pi - x$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$ ausrechnen. **[10 Punkte]**

**Abgabe:** Bis spätestens Montag, den 17.06.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.