Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 7
31.05.2013

# Übungen zur Analysis 2

**7.1 Numerische Beispiele zum Banachschen Fixpunktsatz:**

(a) **Approximation an $\sqrt{2}$.** Berechnen Sie mit Taschenrechnergenauigkeit die ersten drei Näherungen $x_1, x_2, x_3$ an $\sqrt{2}$ nach dem Heronverfahren mit der Startnäherung $x_0 = 2$. Berechnen Sie die a-priori-Schranke und die a-posteriori-Schranke für den Fehler $|x_n - \sqrt{2}|$, $n = 1, 2, 3$, die sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz mit der Kontraktionskonstante $K = \frac{1}{2}$ ergibt. Vergleichen Sie (mit Taschenrechnergenauigkeit) diese Fehlerschranken mit dem tatsächlichen Wert des Fehlers $|x_n - \sqrt{2}|$.

(b) **Approximation an $i$ in $\mathbb{Z}_5$.** Berechnen Sie ein $x \in \{0, 1, \ldots, 124\}$ mit $\hat{d}_5(x, i) \leq 1/125$, indem Sie die Rekursion aus dem Banachschen Fixpunktsatz auf die Abbildung $f : \overline{M} \to \overline{M}$ aus Beispiel 1.139 mit dem Startwert $x_0 = 2$ anwenden. Stellen Sie $x$ und $x^2 + 1$ in 5-adischer Darstellung $\sum_{k=0}^{n} a_k 5^k$ mit $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dar. **[10 Punkte]**

**7.2 Fehlerabschätzung im Iterationsverfahren nach Picard-Lindelöf** Mit den Bezeichnungen von eben sei

$$(y^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$$

die wie im Banachschen Fixpunktsatz rekursiv definierte Folge mit der konstanten Startfunktion

$$y^{(0)}(x) = b \text{ für } x \in I$$

und dem Rekursionsschritt

$$y^{(m+1)} = \Phi(y^{(m)}) \text{ für } m \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei $C = \sup_{x \in I} \|f(x, b)\|$. Zeigen Sie für alle $x \in I$ und $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\|y^{(m+1)}(x) - y^{(m)}(x)\| \leq C L^m \frac{|x - a|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Folgern Sie für den Fixpunkt $y$ von $\Phi$, $x \in I$ und $m \in \mathbb{N}_0$ im Fall $L > 0$:

$$\begin{aligned}
\|y(x) - y^{(m)}(x)\| &\leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x - a|^k}{k!} \\
&= \frac{C}{L} \left( e^{L|x-a|} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(L|x - a|)^k}{k!} \right) = C \left| \int_a^x \frac{|L(x - t)|^m}{m!} e^{L|t-a|} \, dt \right|.
\end{aligned}$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Lagrange-Darstellung des Taylor-Restglieds. **[10 Punkte]**

**7.3** In einem Reaktionsgefäß befinden sich drei chemische Substanzen Die Substanzen können sich nach folgenden Reaktionen ineinander umwandeln:

$$A \rightleftarrows B \rightleftarrows C$$

wobei die Rate, mit der $A$ in $B$ umgewandelt wird, proportional zur Konzentration von $A$ ist mit Proportionalitätskonstanten $k_{AB} > 0$. Analoges gilt für die Reaktionen

$$B \to C\,,\ C \to B\,,\ B \to A$$

mit Proportionalitätskonstanten $k_{BC}, k_{CB}, k_{BA}$.

(a) Beschreiben Sie die Dynamik der Konzentrationen $a(t), b(t), c(t)$ von $A, B, C$ zum Zeitpunkt $t$ durch ein Differentialgleichungssystem.

(b) Lösen Sie dieses System mit der Anfangsbedingung $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$ (d.h. anfangs ist nur $A$ im Reaktionsgefäß vorhanden.)

(c) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} a(t)$, $\lim_{t\to\infty} b(t)$ und $\lim_{t\to\infty} c(t)$. **[10 Punkte]**

**7.4** Eine punktförmige Masse hängt an einer Feder (Federkonstante 1). Zusätzlich zur Federkraft, die die Masse zur Gleichgewichtslage zurücktreibt, wirkt noch eine bremsende Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit. Wir beschreiben dieses Modell durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y_1''(t) = -y_1(t) - \mu y_1'(t)$$

oder äquivalent durch das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - \mu y_2(t) \end{aligned}$$

mit einem "Reibungskoeffizienten" $\mu \geq 0$. Berechnen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems für gegebene Anfangsbedingung $y_1(0) = b_1$, $y_2(0) = b_2$. Für welche Werte von $\mu$ ist die zum Differentalgleichungssystem gehörende Matrix diagonalisierbar? Für welchen Wert von $\mu$ braucht man ein $2 \times 2$-Jordankästchen? **[10 Punkte]**

**7.5** **Beispiel einer abgeschlossenen und beschränkten, aber nicht kompakten Menge.** Es sei $K = \{f \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) |\ \|f\|_2 \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball in $\ell^2(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass $K$ nicht kompakt ist. Zeigen Sie dazu, dass die offene Überdeckung $(U_{1/\sqrt{2}}(x))_{x\in K}$ von $K$ mit den offenen Kugeln $U_{1/\sqrt{2}}(x) = \{y \in \ell^2(\mathbb{N}) |\ \|y - x\|_2 < 1/\sqrt{2}\}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, indem Sie zeigen, dass keine der Mengen $U_{1/\sqrt{2}}(x)$ mindestens zwei "kanonische Einheitsvektoren" $e_n$, $n \in \mathbb{N}$, enthält, wobei $e_n(j) = \delta_{n,j}$ (Kronecker-Delta). **[10 Punkte]**

**7.6** Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq M$ eines halbmetrischen Raums $(M, d)$ genau dann totalbeschränkt ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E \subseteq N$ gibt, so dass gilt:

$$N \subseteq \bigcup_{x\in E} U_\epsilon^d(x).$$

*Hinweis:* Anders als in der Definition der Totalbeschränktheit wird hier $E \subseteq N$ statt $E \subseteq M$ gefordert. **[10 Punkte]**

**Abgabe:** Bis spätestens Montag, den 10.06.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.