MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

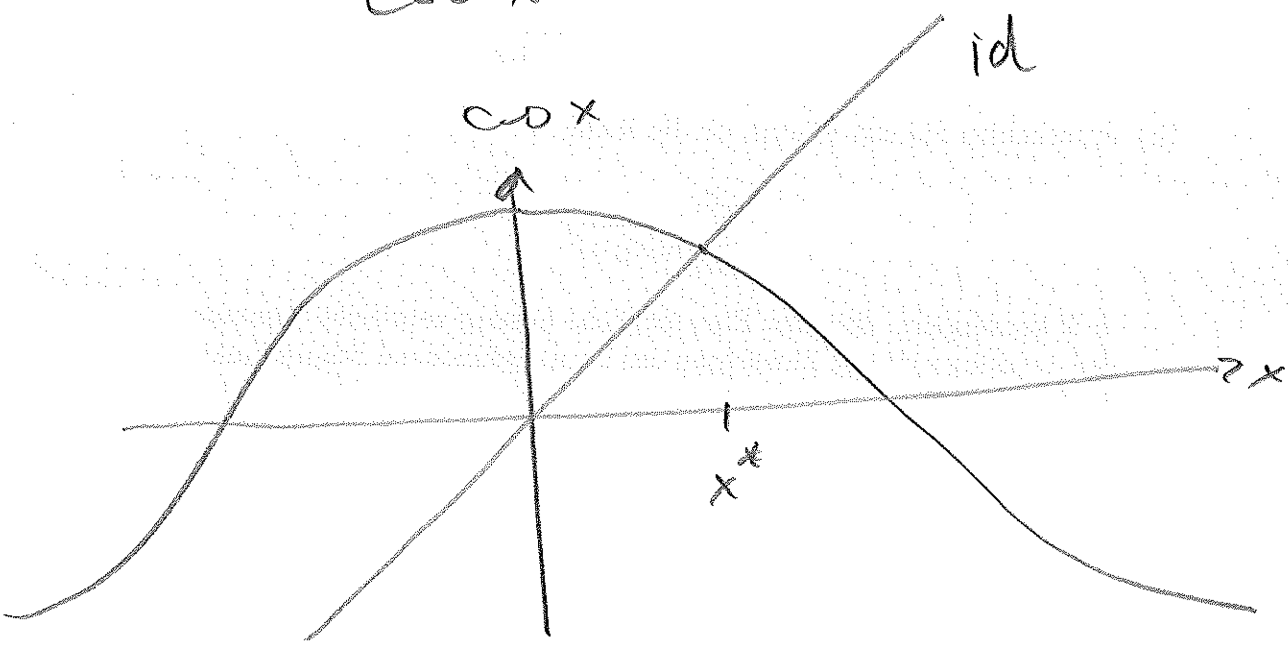
Sommersemester 2013
Blatt 6
24.05.2013

Übungen zur Analysis 2

6.1 Geben Sie eine beliebige Zahl x in Ihren Taschenrechner ein und drücken Sie immer wieder (im Bogenmaß-Modus) die Cosinus-Taste. Wiederholen Sie das Experiment mit anderen Zahlen. Beschreiben Sie, was Sie beobachten. **[10 Punkte]**

6.1. Das geht auf den Fixpunkt von Cosinus!

$\cos x^* = x^*$

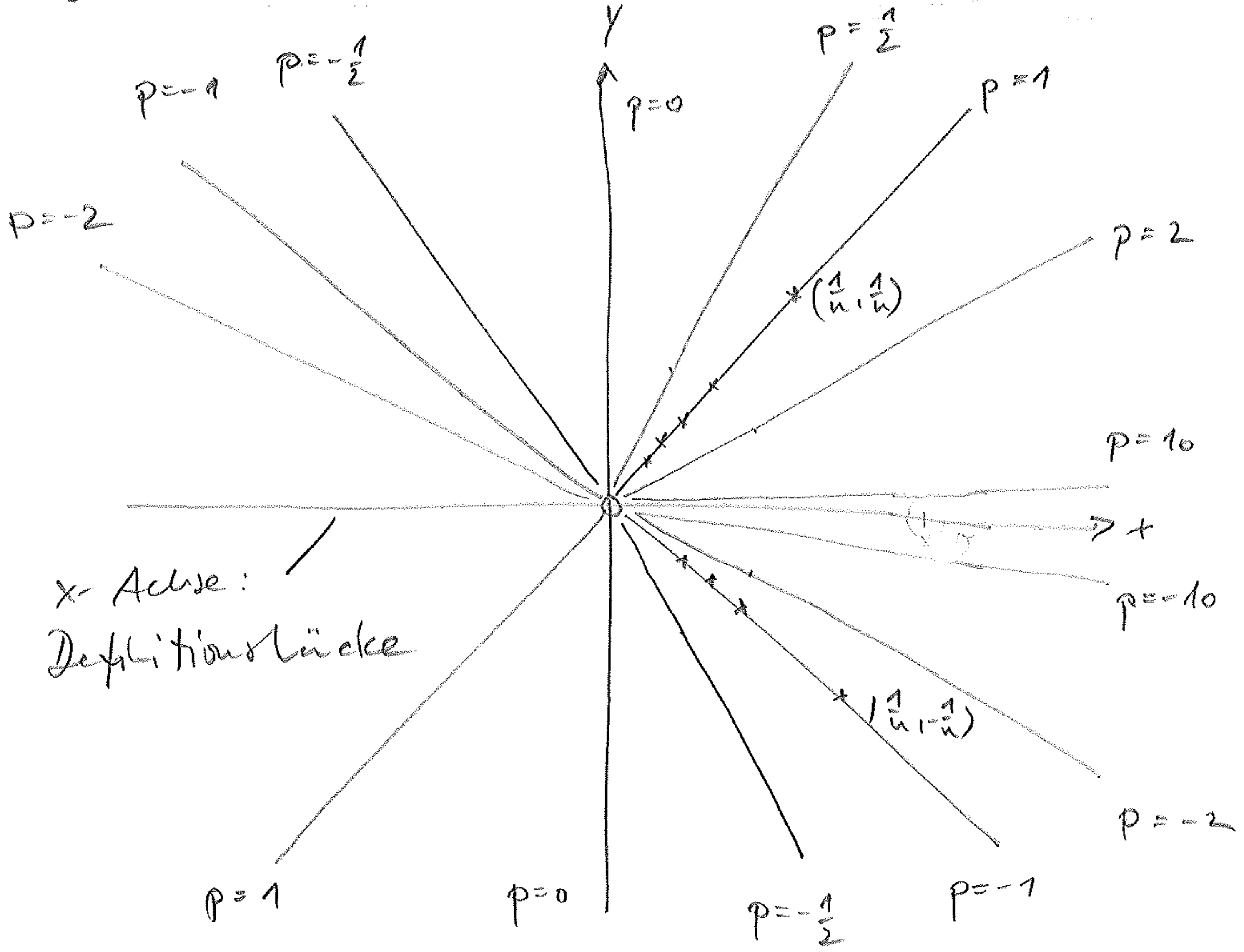


6.2 Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $q : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$, $q(x, y) = x/y$ eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung

$$Q : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \setminus \{(0,0), (\infty, \infty)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

jedoch keine Fortsetzung zu einer in $(0, 0)$ oder in (∞, ∞) stetigen Funktion mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt. Dabei werden Teilmengen von $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$ mit der Teilraumtopologie zur Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen. **[10 Punkte]**

6.2. Dies ist eine hübsche Sache, die man – wenn man das Ganze in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (nicht $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) betrachtet – sogar zeichnen kann: Sei $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $p(x,y) \mapsto x/y$. Ich skizziere den 3-dim Graphen mit Höhenlinien:



Um die Definitionslücke

$$D_{(x,0)} := \{ (x,0) \mid x \neq 0 \}$$

zu schließen, können wir

$$p[D_{(x,0)}] = \{\infty\}$$

setzen (also „$x/0 = \infty$" für $x \neq 0$).

Später definieren wir genauso für

$$D_{(\infty,y)} := \{ (\infty, y) \mid y \neq \infty \}$$

$$D_{(x,\infty)} := \{ (x, \infty) \mid x \neq \infty \}$$

$$p[D_{(\infty,y)}] = \{\infty\}, \quad p[D_{(x,\infty)}] = \{0\},$$

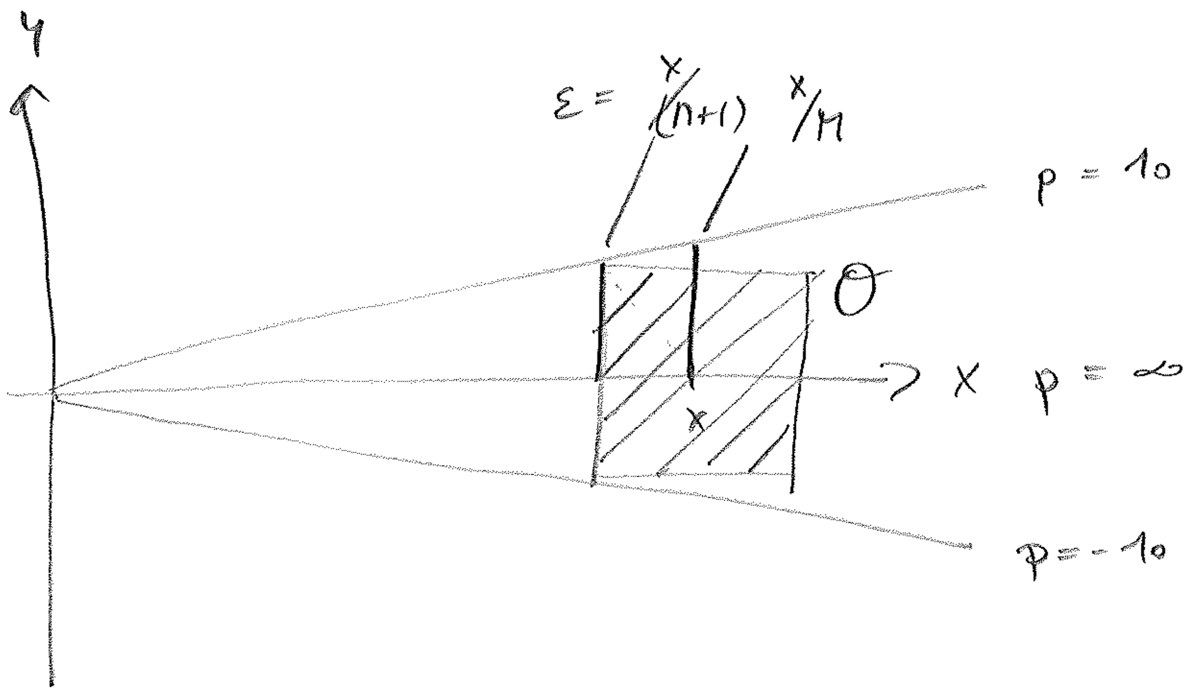
jetzt überprüfen wir aber erst mal die Stetigkeit auf $D_{(x,0)}$:

Sei $x \neq 0$ bel. Dann müssen wir zu jeder Umgebung U von $p(x,0)$ eine Umgebung O von $(x,0)$ angeben, mit $p[O] \subset U$. Weil $p(x,0) = \infty$,

$$\exists M \; \forall z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : |z| > M \Rightarrow z \in U.$$

(U enthält also alle $z > n$ und $z < -n$.) Gesucht ist eine Umgebung von $(x,0)$. In der Produkttopologie sind auf jeden Fall die offenen Quader offen. Setze $\varepsilon := \frac{x}{n+1}$. Dann ist für $(\tilde{x},\tilde{y})$ aus dem offenen Quader mit Mittelpunkt $(x,0)$ und Seitenlänge 2ε $\left|\tilde{x}/\tilde{y}\right| > n$.

(Skizze)



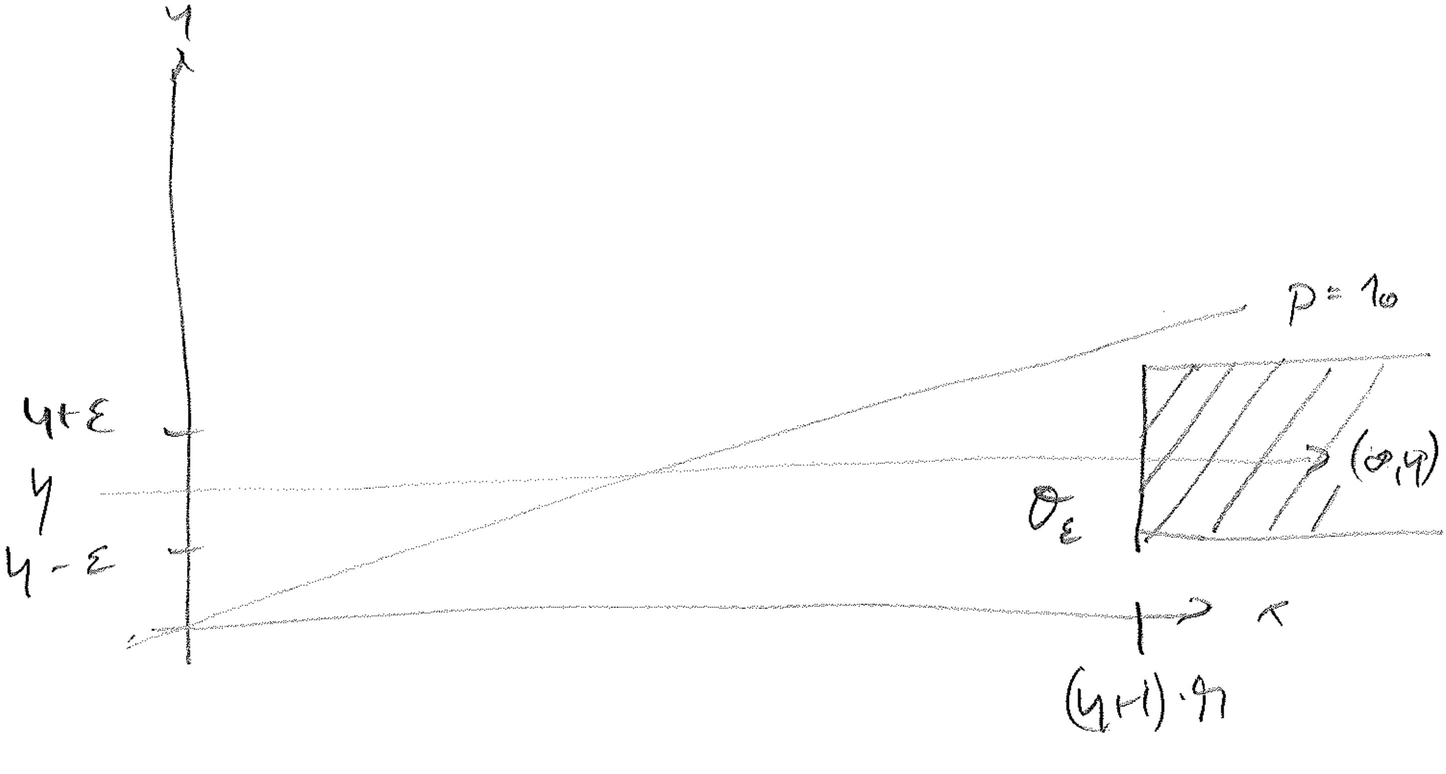
Dieser offene Quader taugt also als O, denn $p[O] \subset U$.

Also ist p stetig in $D_{(x,\infty)}$.

Für $(\infty, y) \in D_{(\infty,y)}$ sind die Umgebungen in der Produkttop. z. B. Mengen der Form

$$Q_\varepsilon(\infty, y) := \{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 \text{ mit } |\tilde{x}| > 1/\varepsilon \text{ und } |y - \tilde{y}| < \varepsilon \}$$

Hier taugt $\varepsilon := \min\left(1, \frac{1}{(y+1)|\Gamma|}\right)$ (Skizze).



Also haben wir Stetigkeit auf $D_{(\infty,4)}$. Auf $D_{(x,\infty)}$ geht's genauso.

Bleibt noch z.z.: Es gibt keine stetige Fortsetzung von φ nach $(0,0)$: Das sieht man so:

Die Folge $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ und

$$\varphi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Damit müsste $\varphi(0,0) := 1$ gesetzt werden.

Aber $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ und

$$\varphi\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = -1, \quad (\text{n-stetig})$$

Also $\varphi(0,0) = -1$.

Für (∞,∞) genauso. $\square$

6.3 (a) **Dichtheit von Quadern mit dichten Seiten.** Es seien (M_k, d_k), $k = 1, \ldots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$, halbmetrische Räume mit dem Produktraum $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, versehen mit der Produktmetrik d. Weiter sei $A_k \subseteq M_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie:

$$\overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_n} = \overline{A_1 \times \ldots \times A_n}.$$

Folgern Sie: Ist für alle $k = 1, \ldots, n$ die Menge A_k dicht in (M_k, d_k), so ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n$ dicht in M.

(b) **Vervollständigung von endlichen kartesischen Produkten.** Es seien (M_k, d_k), $k = 1, \ldots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$, halbmetrische Räume mit dem Produktraum $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, versehen mit der Produktmetrik d. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ sei $(\hat{M}_k, \hat{d}_k, i_k)$ eine Vervollständigung von M_k. Es seien $\hat{M} := \hat{M}_1 \times \ldots \times \hat{M}_n$ und $\hat{d}$ die Produktmetrik auf $\hat{M}$ zu $\hat{d}_1, \ldots, \hat{d}_n$, sowie $i : M \to \hat{M}$, $i(x_1, \ldots, x_n) = (i_1(x_1), \ldots, i_n(x_n))$. Zeigen Sie, dass $(\hat{M}, \hat{d}, i)$ eine Vervollständigung von (M, d) ist. **[10 Punkte]**

Lösung

(a) Wir stellen fest, dass $\bigtimes_{i=1}^n U_\varepsilon^{d_i}(x_i) = U_\varepsilon^d(x)$ für $x := (x_1, \ldots, x_n)$. Also gibt es für alle $x \in \left(\bigtimes_{i=1}^n \overline{A}_i\right)^c$ $\varepsilon_i > 0$ s. d. $U_{\varepsilon_i}^{d_i}(x_i) \cap \overline{A}_i = \emptyset \Rightarrow U^d_{\min_{1 \le i \le n} \varepsilon_i}(x) \cap \bigtimes_{i=1}^n \overline{A}_i = \emptyset$ und damit $\overline{\bigtimes_{i=1}^n A_i} \subset \bigtimes_{i=1}^n \overline{A}_i$ abgeschlossen. Umgekehrt folgt

$$\begin{aligned} x \in \bigtimes_{i=1}^n \overline{A}_i &\Leftrightarrow \forall 1 \le i \le n \; \forall \varepsilon_i > 0 : U_{\varepsilon_i}^{d_i}(x_i) \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^{d_i}(x_i) \cap A_i \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \bigtimes_{i=1}^n U_\varepsilon^{d_i}(x_i) \cap \bigtimes_{i=1}^n A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^d(x) \cap \bigtimes_{i=1}^n A_i \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in \overline{\bigtimes_{i=1}^n A_i}. \end{aligned}$$

Inbesondere folgt

$$\forall 1 \le i \le n : \; \overline{A}_i = M_i \Rightarrow \overline{\bigtimes_{i=1}^n A_i} = \bigtimes_{i=1}^n \overline{A}_i = \bigtimes_{i=1}^n M_i = M.$$

(b) Vgl. 1.111. Seien $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $y := (y_1, \ldots, y_n)$. i ist eine Isometrie

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = \max_{1 \le k \le n} \hat{d}_i(i_k(x_k), i_k(y_k)) = \max_{1 \le k \le n} d_k(x_k, y_k) = d(x, y).$$

Mit Teil (a) folgt weiter, dass $i(M) = \bigtimes_{k=1}^n i(M_k)$ dicht in $\hat{M}$ liegt. Sei nun $(a_l)_l$ eine Cauchyfolge in $\hat{M}$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall l, m \ge N_0 : \varepsilon > \hat{d}(a_l, a_m) \ge d_k(a_l^k, a_m^k), \forall 1 \le k \le n$. Somit sind die $(a_l^k)_l$ für $a_l = (a_l^k)_{1 \le k \le n}$, $\forall 1 \le k \le n$ Cauchyfolgen. D. h. insbesondere $\exists a^k \in \hat{M}_k \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0^k \in \mathbb{N} \; \forall l \ge n_0^k : \; \hat{d}_k(a_l^k, a^k) < \varepsilon$. Sei $a := (a^k)_{1 \le k \le n}$, so gilt $\forall \varepsilon > 0, n_0 = \max_{1 \le k \le n} n_0^k \; \forall l \ge n_0$:

$$\hat{d}(a_l, a) = \max_{1 \le k \le n} \hat{d}_k(a_l^k, a^k) < \varepsilon.$$

Damit ist $(\hat{M}, \hat{d})$ vollständig.

6.4 Zeigen Sie: Ist $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und (M, d) ein halbmetrischer Raum, so wird durch $d_\infty : M_b^I \times M_b^I \to \mathbb{R}$, $d_\infty(f, g) = \sup_{i \in I} d(f_i, g_i)$ eine Halbmetrik auf M_b^I gegeben. Ist d sogar eine Metrik, so ist auch d_∞ eine Metrik. **[10 Punkte]**

Lösung

M_b^I sind nach Definition 1.102 die beschränkten Funktionen $I \to M$. Vgl. auch Blatt 1, Aufgabe 6.
Seien im Folgenden $f = (f_i), g = (g_i), h = (h_i) \in M_b^I$ beliebig. Aus

$$d_\infty(f,g) := \sup_{i \in I} d(f_i, g_i) \geq d(f_i, g_i) \geq 0, \quad \forall i \in I$$

folgt Positivität. Ist d sogar eine Metrik gilt weiter

$$f = g \Leftrightarrow f_i = g_i, \forall i \in I \Leftrightarrow d(f_i, g_i) = 0,\ \forall i \in I \Leftrightarrow \sup_{i \in I} d(f_i, g_i) = 0,$$

wobei im letzten Schritt $\Rightarrow$ klar ist und $\Leftarrow$ sich ergibt, weil $0 = \sup_{i \in I} d(f_i, g_i) \geq d(f_i, g_i) \geq 0,\ \forall i \in I$ schon $d(f_i, g_i) = 0,\ \forall i \in I$ impliziert. Die analoge Rechnung mit nur $\Rightarrow$ $-$Implikationen zeigt Selbstabstand 0.
Symmetrie ergibt sich aus

$$d_\infty(f,g) := \sup_{i \in I} d(f_i, g_i) = \sup_{i \in I} d(g_i, f_i) = d_\infty(g, f).$$

Schließlich gilt es noch die Dreiecksungleichung zu verifizieren:

$$\begin{aligned} d_\infty(f,h) &= \sup_{i \in I} d(f_i, h_i) \leq \sup_{i \in I} \left(d(f_i, g_i) + d(g_i, h_i)\right) \\ &\leq \sup_{i \in I} \left(\sup_{j \in I} d(f_j, g_j) + \sup_{k \in I} d(g_k, h_k) \right) \\ &= \sup_{j \in I} d(f_j, g_j) + \sup_{k \in I} d(g_k, h_k) = d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h). \end{aligned}$$

6.5 (a) **(Unvollständigkeit von $C([a,b])$ bezüglich $\|\cdot\|_p$)** Gegeben sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass der Raum $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ nicht vollständig ist. Betrachten Sie dazu die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \max\{0, \min\{1, nx\}\}$.

(b) Es sei $a > 0$ und $f_n : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \min\{1, \max\{0, n(a/2 - |x|)\}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(L^2([-a,a],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ gegen ein $f \in L^2([-a,a],\mathbb{K})$ konvergiert. Zeigen Sie $\|f\|_2 = \sqrt{a}$.

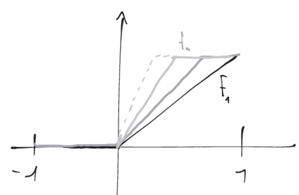
(c) Zeigen Sie für $a < b$, dass die Menge $M = \{f \in C([a,b],\mathbb{K}) |\ f(a) = f(b)\}$ dicht in $(C([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ und in $(L^2([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ ist. **[10 Punkte]**

$\boxed{6.5}$

(a) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[-1,1]$ gegeben durch

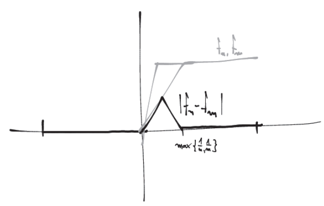
$(z)_+ := \max\{0,z\}$

$$f_n(x) = \max\{0, \min\{1, nx\}\} = (\min\{1, nx\})_+$$



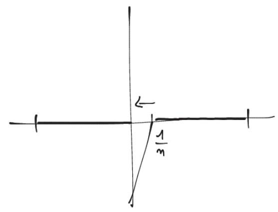
dann gilt für $n,m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \mathbb{1}_{[0, \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}]}(x)$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_p^p \leq \int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[0,\max\{\frac{1}{n},\frac{1}{m}\}]}(x)\, dx = \frac{1}{\min\{n,m\}} \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$



D.h. $(f_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge in $(C[-1,1], \|\cdot\|_p)$. Weiter gilt

$$\|f_n - 1_{[0,1]}\|_p^p = \int_0^{1/n} |nx|^p = \frac{1}{p+1}\, x^{p+1}\Big|_0^{\frac1n} = \frac{1}{p+1}\,\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$



Da wir noch nicht wissen, dass $1_{[0,1]} \in L^p[-1,1]$, können wir nicht die Eindeutigkeit von Grenzwerten benutzen, um $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 1_{[0,1]}$ $(\notin C[-1,1])$ zu folgern. Nehmen wir aber an $\exists f \in C[-1,1]$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, dann folgt

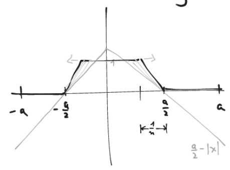
$$\|f - 1_{[0,1]}\|_p \le \|f - f_n\| + \|f_n - 1_{[0,1]}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \int_{-1}^{1} |f(x) - 1_{[0,1]}(x)|^p\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)|^p\,dx + \int_0^1 |f(x)-1|^p\,dx$$

Da $|f|^p$ und $|f-1|^p$ stetig sind, folgt $f(x)=0$ $\forall x\in[-1,0]$ sowie $f(x)=1$ $\forall x\in[0,1]$, was im Widerspruch zu $f\in C[-1,1]$ steht. Also ist $(f_n)_n$ nicht konvergent in $(C[-1,1], \|\cdot\|_p)$ und damit $C[-1,1]$ nicht vollständig bezgl. $\|\cdot\|_p$.

(b) Sei $(f_n)_n$ die Folge von Funktionen auf $[-a,a]$, geg. durch $f_n(x) := \min\{1, n(\frac a2 - |x|)_+\}$

Dann ist $f_n \in C[-a,a]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, und für $n,m\in\mathbb{N}$ gilt



$$\|f_n - f_m\|_2^2 = 2\int_0^a |f_n(x) - f_m(x)|^2\,dx \le 2\int_0^{\frac a2} 1_{[\frac a2 - \max\{\frac1n,\frac1m\},\, \frac a2]}(x)\,dx = \frac{2}{\min\{n,m\}} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

Also ist $(f_n)_m$ eine Cauchy-Folge in $(C[-a,a], \|\cdot\|_2)$ und konvergiert damit in $L^2[-a,a]$, der Vervollständigung von $C[-a,a]$ bezgl. $\|\cdot\|_2$. D.h. $\exists f\in L^2[-a,a]$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$, $n\to\infty$.

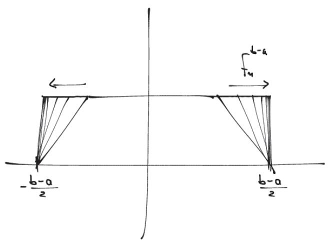
Wegen der Stetigkeit von $\|\cdot\|_2$, folgt $\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2$. Für $n > \frac a2$ gilt

$$\|f_n\|_2^2 = 2\int_0^{a/2} |f_n|^2 = 2\Big(\frac a2 - \frac1n + \underbrace{\int_{\frac a2 - \frac1n}^{a/2} \underbrace{(\tfrac a2 - x)^2}_{\le 1}\,dx}_{\le \frac1n \to 0,\ n\to\infty}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} a$$

und somit $\|f\|_2 = \sqrt{a}$.

(c) Sei $f\in C([a,b],\mathbb{K})$. Wir konstruieren $(h_n)_n \subset M$ mit $h_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$. Sei f_n^a die Folge aus (b), dann definiert $g_n(x) := f_n^{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$ eine Folge in $C[a,b]$ mit

$$\|g_n - 1\|_2^2 = \int_a^b |g_n(x)-1|^2\,dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} |f_n^{b-a}(x)-1|^2\,dx$$



$$= 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} \underbrace{|f_n^{b-a}(x)-1|^2}_{\le \mathbb{1}_{[\frac{b-a}{2}-\frac{1}{n},\, \frac{b-a}{2}]}(x)}\,dx \le \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Setzen wir nun $h_n := f g_n$, dann folgt $\|h_n - f\|_2 \le \|f\|_\infty \|g_n - 1\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $h_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$. Außerdem gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ $h_n(a) = 0 = h_n(b)$, da $f_n^{b-a}(a - \frac{a+b}{2}) = f_n^{b-a}(-\frac{b-a}{2}) = 0$ sowie $f_n^{b-a}(b - \frac{a+b}{2}) = f_n^{b-a}(\frac{b-a}{2}) = 0$, also $(h_n)_n \subset M$. Somit ist M dicht in $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$.

$\boxed{\text{Dichtheit von } M \subset L^2([a,b], \|\cdot\|_2):}$

Gemäß dem Kommentar im Skript S. 52 unten, identifizieren wir $f \in C[a,b]$ mit $\hat{i}(f) \in \operatorname{ran}(\hat{i})$, wobei der Wertebereich von $\hat{i}$, $\operatorname{ran}(\hat{i})$, dicht in $L^2[a,b]$ ist. D.h. $C[a,b] \subset L^2[a,b]$ ist dicht bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Wir beweisen zunächst folgende Aussage:

Ist $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $B \subset X$ eine dichte Teilmenge und ist $A \subset B$ dicht bzgl. der Teilraumtopologie $\mathcal{T}_B = \{U \cap B \mid U \in \mathcal{T}\}$, dann ist auch $A \subset X$ dicht.

Beweis: Wegen der Charakterisierung aus Übung 3.6 müssen wir zeigen: $\forall\, U \in \mathcal{T}$ nichtleer: $U \cap A \neq \emptyset$.
Sei also $U \in \mathcal{T}$ nichtleer. Da $B \subset X$ dicht ist, ist $U \cap B \neq \emptyset$. Außerdem ist $U \cap B \in \mathcal{T}_B$, weshalb aus der Dichtheit von $A \subset B$ (bzgl. $\mathcal{T}_B$) und $U \cap B \neq \emptyset$ folgt $\emptyset \neq (U \cap B) \cap A \subset U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ $\square$

Bemerkung 1: Ist $(X,\mathcal{T}) = (X,d)$ ein halbmetrischer Raum, so wird die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_B$ auf $B \subset X$ durch die Einschränkung von d auf B erzeugt. Insbesondere gilt damit im normierten Fall: $A \overset{\text{dicht}}{\subset} (B, \|\cdot\|) \overset{\text{dicht}}{\subset} (X, \|\cdot\|) \Rightarrow A \overset{\text{dicht}}{\subset} (X, \|\cdot\|)$

Bemerkung 2: Die Aussage lässt sich im Fall von Bem. 1, d.h. wenn (X,d) ein halbmetrischer Raum ist, auch leicht direkt mithilfe der Charakterisierung von Berührpunkten in halbmetrischen Räumen als Grenzwerte von Folgen (Lemma 1.49) zeigen: Ist $x \in X$, dann gibt es eine Folge $(b_n)_n \subset B$ mit $b_n \xrightarrow{d} x$. Für $n \in \mathbb{N}$, wähle $a_n \in A$ so, dass $d(a_n, b_n) \leq d(b_n, x)$, was möglich ist, da aufgrund der Dichtheit von $A \subset B$ bzgl. $d|_B$ jedes Element aus B beliebig gut durch Elemente aus A approximierbar ist (wieder Lemma 1.49). Dann folgt: $d(a_n,x) \leq d(a_n,b_n) + d(b_n,x) \leq 2d(b_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Die Dichtheit von $M \subset \mathcal{L}^2[a,b]$ folgt damit direkt aus der Dichtheit von $M \subset (C[a,b], \|\cdot\|_2)$.

6.6 (a) ***p*-adische Zahlendarstellung.** Es sei p eine Primzahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ konvergiert.

(b) **$-1/4$ als Element von $\mathbb{Z}_5$.** Wir setzen

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k,$$

wobei die Konvergenz der Reihe in $(\mathbb{Z}_5, \hat{d}_5)$ gemeint ist. Zeigen Sie: $4x = -1$. In diesem Sinn ist $-1/4 \in \mathbb{Z}_5$. **[10 Punkte]**

6.6

(a) Wir müssen zeigen: Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{Z}, d_p)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\left(\frac{1}{p}\right)^{N+1} < \varepsilon$.
Für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq N$ gilt

$$0 \leq S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k p^k \qquad (*)$$

und darum $v_p(S_n - S_m) \geq m+1 \geq N+1$. Also

$$d_p(S_n, S_m) = \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(S_n - S_m)} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{N+1} < \varepsilon \qquad (**)$$

Durch Vertauschen von n, m in $(*)$ erhält man $(**)$ auch im Fall $m > n \geq N$.
Somit gilt $d_p(S_n, S_m) < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N$, d.h. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{Z}, d_p)$ und konvergiert darum in dessen Vervollständigung $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$.

(b) $\underline{\overline{\text{z.z.:}}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot 5^k = -1$, wobei die Konvergenz in $(\mathbb{Z}_5, \hat{d}_5)$ gemeint ist.

Wir setzen $S_n := \sum_{k=0}^{n} 4\cdot 5^k$ und zeigen: $\hat{d}_5(S_n, -1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $\forall n\in\mathbb{N}: S_n \in \mathbb{Z}$, sowie $-1\in\mathbb{Z}$, gilt $\hat{d}_5(S_n, -1) = d_5(S_n, -1)$. Weiter folgt aus der geometrischen Summenformel

$$S_n = 4\cdot\sum_{k=0}^{n} 5^k = 4\cdot\frac{1-5^{n+1}}{1-5} = 5^{n+1}-1$$

und deshalb $v_p(S_n+1) = v_p(5^{n+1}) = n+1$. Also $d_p(S_n,-1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{v_p(S_n+1)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$, d.h. $S_n \xrightarrow{\hat{d}_p} -1$, bzw. $4x = -1$.