Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 6
24.05.2013

Übungen zur Analysis 2

6.1 Geben Sie eine beliebige Zahl x in Ihren Taschenrechner ein und drücken Sie immer wieder (im Bogenmaß-Modus) die Cosinus-Taste. Wiederholen Sie das Experiment mit anderen Zahlen. Beschreiben Sie, was Sie beobachten. **[10 Punkte]**

6.2 Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $q : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$, $q(x, y) = x/y$ eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung

$$Q : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

jedoch keine Fortsetzung zu einer in $(0, 0)$ oder in (∞, ∞) stetigen Funktion mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ besitzt. Dabei werden Teilmengen von $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$ mit der Teilraumtopologie zur Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen. **[10 Punkte]**

6.3 (a) **Dichtheit von Quadern mit dichten Seiten.** Es seien (M_k, d_k), $k = 1, \dots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$, halbmetrische Räume mit dem Produktraum $M = M_1 \times \dots \times M_n$, versehen mit der Produktmetrik d. Weiter sei $A_k \subseteq M_k$ für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\overline{A_1} \times \dots \times \overline{A_n} = \overline{A_1 \times \dots \times A_n}.$$

Folgern Sie: Ist für alle $k = 1, \dots, n$ die Menge A_k dicht in (M_k, d_k), so ist auch $A_1 \times \dots \times A_n$ dicht in M.

(b) **Vervollständigung von endlichen kartesischen Produkten.** Es seien (M_k, d_k), $k = 1, \dots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$, halbmetrische Räume mit dem Produktraum $M = M_1 \times \dots \times M_n$, versehen mit der Produktmetrik d. Für jedes $k = 1, \dots, n$ sei $(\hat{M}_k, \hat{d}_k, i_k)$ eine Vervollständigung von M_k. Es seien $\hat{M} := \hat{M}_1 \times \dots \times \hat{M}_n$ und $\hat{d}$ die Produktmetrik auf $\hat{M}$ zu $\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n$, sowie $i : M \to \hat{M}$, $i(x_1, \dots, x_n) = (i_1(x_1), \dots, i_n(x_n))$. Zeigen Sie, dass $(\hat{M}, \hat{d}, i)$ eine Vervollständigung von (M, d) ist. **[10 Punkte]**

6.4 Zeigen Sie: Ist $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und (M, d) ein halbmetrischer Raum, so wird durch $d_\infty : M_b^I \times M_b^I \to \mathbb{R}$, $d_\infty(f, g) = \sup_{i \in I} d(f_i, g_i)$ eine Halbmetrik auf M_b^I gegeben. Ist d sogar eine Metrik, so ist auch d_∞ eine Metrik. **[10 Punkte]**

6.5 (a) **(Unvollständigkeit von $C([a, b])$ bezüglich $\|\cdot\|_p$)** Gegeben sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass der Raum $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ nicht vollständig ist. Betrachten Sie dazu die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \max\{0, \min\{1, nx\}\}$.

(b) Es sei $a > 0$ und $f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \min\{1, \max\{0, n(a/2 - |x|)\}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(L^2([-a, a], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ gegen ein $f \in L^2([-a, a], \mathbb{K})$ konvergiert. Zeigen Sie $\|f\|_2 = \sqrt{a}$.

(c) Zeigen Sie für $a < b$, dass die Menge $M = \{f \in C([a, b], \mathbb{K}) |\ f(a) = f(b)\}$ dicht in $(C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ und in $(L^2([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ ist. **[10 Punkte]**

6.6 (a) **p-adische Zahlendarstellung.** Es sei p eine Primzahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $(\mathbb{Z}_p, \hat{d}_p)$ konvergiert.

(b) $-1/4$ **als Element von $\mathbb{Z}_5$.** Wir setzen

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} 5^k,$$

wobei die Konvergenz der Reihe in $(\mathbb{Z}_5, \hat{d}_5)$ gemeint ist. Zeigen Sie: $4x = -1$. In diesem Sinn ist $-1/4 \in \mathbb{Z}_5$. **[10 Punkte]**

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 03.06.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.