Übungen zur Analysis 2

5.1 Äquivalenz von Normen. Es seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei Halbnormen auf dem gleichen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(a) Die Identität $\mathrm{id} : (V, \|\cdot\|_A) \to (V, \|\cdot\|_B)$, $\mathrm{id}(x) = x$, ist stetig,

(b) $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}$,

(c) $\exists C \geq 0\ \forall x \in V:\ \|x\|_B \leq C\|x\|_A$.

Lösung

Die Äquivalenz von (a) und (c) ergibt sich aus Lemma 1.63 der Vorlesung, da die Identität offensichtlich linear ist. Die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b) folgt aus der Definition der Stetigkeit:

$$\mathrm{id}\ \text{stetig}\ \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} : \mathrm{id}^{-1}(B) = B \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A} \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}.$$

5.2 Äquivalenz aller p-Normen über $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie für $1 \leq p < q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \in \mathbb{K}^n$:

$$n\|x\|_\infty \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty.$$

Insbesondere sind alle Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{K}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, zueinander äquivalent. Später werden wir sehen, dass dies sogar für *alle* Normen auf $\mathbb{K}^n$ gilt.

Lösung

Für alle $1 \leq p \leq \infty$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty \leq n\|x\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Beweis 2.2). Weiter folgt für $q \geq p$ sofort aus $|x_i|/\|x\|_p \leq |x_i|/\|x\|_\infty \leq 1$, $\forall 1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} = \left(\sum_{i=1}^n \left|\underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_p}}_{\leq 1}\right|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{1/q} = \left(\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p}\right)^{1/q} = 1.$$

5.3 Operatornorm. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein halbnormierter Raum, jeweils über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$\mathcal{B}(V, W) := \{L : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W) |\ L \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Für $L \in \mathcal{B}(V, W)$ setzen wir

$$\|L\|_{V\to W} := \inf\{C \geq 0 |\ \forall x \in V:\ \|L(x)\|_W \leq C\|x\|_V\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{V\to W} : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(V, W)$ ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass $\|\cdot\|_{V\to W}$ eine Norm ist, wenn auch $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist.

Die (Halb-)Norm $\|\cdot\|_{V\to W} : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}$ wird *Operator(halb-)norm* auf $\mathcal{B}(V, W)$ genannt.

$\boxed{5.3}$

Aufgrund der Definition des Supremums (kleinste obere Schranke) gilt $\forall L \in B(U,W)$:

$$\|L\| := \|L\|_{U\to W} = \inf\{C \geq 0 \mid \forall x \in U: \|L(x)\|_W \leq C\|x\|_U\}$$

$$= \inf\left\{C \geq 0 \;\middle|\; C \geq \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_U} \;\forall x \in U \text{ mit } x \neq 0\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_U} \;\middle|\; x \in U \text{ mit } x \neq 0\right\}$$

(a) $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{U\to W}$ ist eine Halbnorm auf $B(U,W)$:

1. $\|L\| \geq 0$ per Definition

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall L \in B(U,W)$ gilt $\|\alpha L\| = \sup\limits_{x\in U,\, x\neq 0}\left\{|\alpha|\frac{\|L(x)\|_U}{\|x\|_U}\right\} = |\alpha|\,\|L\|$

3. Für $A, B \in B(U,W)$ gilt

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)+B(x)\|_W}{\|x\|_U} \leq \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{\|A(x)\|_W}{\|x\|_U} + \frac{\|B(x)\|_W}{\|x\|_U}\right\}$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|A(x)\|_W}{\|x\|_U} + \sup_{x\neq 0}\frac{\|B(x)\|_W}{\|x\|_U} = \|A\| + \|B\|$$

(b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm, wenn $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist:

Sei $L \in B(U,W)$ mit $\|L\| = 0$, d.h. $\sup\limits_{x\neq 0}\underbrace{\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_U}}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \|L(x)\|_W = 0 \;\; \forall x \neq 0$

$\|\cdot\|_U$ Norm

$\Rightarrow L(x) = 0 \;\; \forall x \in U \;\; \Rightarrow L = 0$

5.4 Matrixnorm. Es sei $A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n,\; j=1,\ldots,m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ eine $n \times m$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$ und $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie

$$\|L_A\|_{2\to 2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|^2}$$

für die Operatornorm $\|L_A\|_{2\to 2}$ von $L_A : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass

$$\|L_A\|_{2\to 2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|^2}$$

möglich ist.

$\boxed{5.4}$

Seien $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $L_A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$. Wir statten $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit der ℓ^2-Norm $\|\cdot\|_2$ aus, d.h. für $v \in \mathbb{K}^n$, $w \in \mathbb{K}^m$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{1/2}, \quad \|w\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |w_k|^2\right)^{1/2}$$

(a) Es gilt für $x \in \mathbb{K}^m$

bzgl. $(v,w)_2 = \sum_{l=1}^{n} \bar{v}_l w_l$ für $v,w \in \mathbb{K}^n$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} \Big|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\Big|^2 \overset{\text{C.S.}}{\leq} \sum_k \Big(\sum_l |a_{kl}|^2\Big)\Big(\sum_l |x_l|^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\Big)\|x\|_2^2$$

und somit $\|L_A x\|_2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|^2\right)^{1/2}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^m$, d.h. $\|L_A\|_{2\to 2} \leq \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|^2\right)^{1/2}$.

(b) Sei $m = n$ und $A = E_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$, d.h. $L_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Dann gilt $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \ \forall x \in \mathbb{K}^n$, also $\|L_A\| = 1$. Wir haben aber $\sqrt{\sum_k\sum_l |a_{kl}|^2} = \sqrt{n}$.

Somit ist im Fall $n > 1$, $\|L_{E_n}\| < \sqrt{\sum_k\sum_l |a_{kl}|^2}$.

5.5 Submultiplikativität der Operatornorm. Es seien $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Weiter seien $L : (U, \|\cdot\|_U) \to (V, \|\cdot\|_V)$ und $M : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ stetige lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Operatornormen $\|\cdot\|_{U\to V}$, $\|\cdot\|_{V\to W}$ und $\|\cdot\|_{U\to W}$ gilt:

$$\|M \circ L\|_{U\to W} \leq \|M\|_{V\to W}\|L\|_{U\to V}.$$

Solution

Recall the definition of the norm operator given in Exercise 5.3. As a consequence of the definition, for every $\varepsilon > 0$ we have

$$\|L(x)\|_V \leq (\|L\|_{U\to V} + \varepsilon)\|x\|_U, \qquad \forall x \in U,$$

and

$$\|M(y)\|_W \leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)\|y\|_V, \qquad \forall y \in V.$$

Hence,

$$\begin{aligned}\|M \circ L(x)\|_W = \|M(L(x))\|_W &\leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)\|L(x)\|_V \\ &\leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)(\|L\|_{U\to V} + \varepsilon)\|x\|_U.\end{aligned}$$

Therefore, for every $\varepsilon > 0$

$$\|M \circ L\|_{U\to W} \leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)(\|L\|_{U\to V} + \varepsilon).$$

Tending ε to zero, we get

$$\|M \circ L\|_{U\to W} \leq \|M\|_{V\to W}\|L\|_{U\to V}.$$

5.6 Gleichmäßige Stetigkeit von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ in der p-adischen Metrik. Es sei p eine Primzahl und $d_p : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die p-adische Metrik aus Beispiel 1.2.3 im Skript, sowie $v_p(k) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Vielfachheit p in der Primfaktorzerlegung von $k \in \mathbb{Z}$. Weiter sei d die Produktmetrik zu d_p auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$v_p(kl) = v_p(k) + v_p(l).$$

Sie dürfen dabei aus der elementaren Zahlentheorie für ganze Zahlen m, n als bekannt voraussetzen, dass mn nicht durch p teilbar ist, wenn m und n nicht durch p teilbar sind.

(b) Folgern Sie, dass die arithmetischen Operationen

$$+ : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p) \text{ und } \cdot : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p)$$

gleichmäßig stetig sind.

Solution

(a) Recall that for every $k \in \mathbb{Z}$, $v_p(k) \in \mathbb{N}_0$ is the largest power of the prime number p in k, i.e. $k = mp^{v_p(k)}$, where $(m, p) = 1$. Let $kl = rp^{v_p(kl)}$, where $(r, p) = 1$. In the other hand we have

$$kl = (p^{v_p(k)}m)(p^{v_p(l)}n) = (mn)p^{v_p(k)+v_p(l)},$$

where $(m, p) = 1$ and $(n, p) = 1$. Since p is a prime number, therefore $(p, mn) = 1$. We have $mn|rp^{v_p(kl)}$. Since $(p, mn) = 1$, it follows $mn|r$. Similarly we get $r|mn$. We conclude that $v_p(kl) = v_p(k) + v_p(l)$.

(b) We shall see that the following two arithmetic maps are uniformly continuous.

$$\begin{aligned} + : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, d) &\to (\mathbb{Z}, d_p), & \qquad \cdot : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, d) &\to (\mathbb{Z}, d_p) \\ (k, l) &\mapsto k + l & (k, l) &\mapsto k \cdot l \end{aligned}$$

Recall that for every $(k, l), (m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (see Exercise 1.6 for the definition of the product metric),

$$d((k, l), (m, n)) = \max\{d_p(k, m), d_p(l, n)\}.$$

First we prove the the addition " + " is uniformly continuous.

$$\begin{aligned} d_p(k+l, m+n) = p^{-v_p(k-m+l-n)} &\leq \max\{p^{-v_p(k-m)}, p^{-v_p(l-n)}\} \\ &= \max\{d_p(k,m), d_p(l,n)\} = d((k,l),(m,n)), \end{aligned}$$

where the first inequality comes from the following property (see Example 1.2.3)

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad p^{-v_p(a+b)} \leq \max\{p^{-v_p(a}, p^{-v_p(b)}\}. \tag{$*$}$$

For every $\varepsilon > 0$, take $\delta = \varepsilon$. Therefore, for every $(k,l),(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ such that $d((k,l),(m,n)) \leq \delta = \varepsilon$ we have

$$d_p(k+l, m+n) \leq d((k,l),(m,n)) \leq \varepsilon.$$

It proves the uniformly continuity of " + ".
We now prove the uniformly continuity of the multiplication " $\cdot$ ".

$$\begin{aligned} d_p(kl, mn) = p^{-v_p(kl-mn)} = p^{-v_p(kl-lm+lm-mn)} &= p^{-v_p(l(k-m)+m(l-n))} \\ &\leq \max\{p^{-(v_p(k-m)+v_p(l))}, p^{-(v_p(l-n)+v_p(m))}\} \\ &\leq \max\{p^{-v_p(k-m)}, p^{-v_p(l-n)}\} = d((k,l),(m,n)). \end{aligned}$$

We get the first inequality using $(*)$ and the result of part (i) . We have the second inequality because $p^{-v_p(l)}$ and $p^{-v_p(m)}$ are smaller than one. For every $\varepsilon > 0$, take $\delta = \varepsilon$. Therefore, for every $(k,l),(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ such that $d((k,l),(m,n)) \leq \delta = \varepsilon$ we have

$$d_p(kl, mn) \leq d((k,l),(m,n)) \leq \varepsilon.$$

It completes the proof.

5.7 Studieren Sie den Beweis der Vollständigkeit des Raums $(\mathrm{CF}_M, d_{\mathrm{CF}})$ im Skript (Aussage 2 von Lemma 1.118, Seiten 48–51).

Lösung: Klar!