Übungen zur Analysis 2

5.1 Äquivalenz von Normen. Es seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei Halbnormen auf dem gleichen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(a) Die Identität $\mathrm{id} : (V, \|\cdot\|_A) \to (V, \|\cdot\|_B)$, $\mathrm{id}(x) = x$, ist stetig,

(b) $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}$,

(c) $\exists C \geq 0 \; \forall x \in V : \; \|x\|_B \leq C\|x\|_A$. **[10 Punkte]**

5.2 Äquivalenz aller p-Normen über $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie für $1 \leq p < q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \in \mathbb{K}^n$:

$$n\|x\|_\infty \geq \|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty.$$

Insbesondere sind alle Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{K}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, zueinander äquivalent. Später werden wir sehen, dass dies sogar für *alle* Normen auf $\mathbb{K}^n$ gilt. **[10 Punkte]**

5.3 Operatornorm. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein halbnormierter Raum, jeweils über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$\mathcal{B}(V, W) := \{L : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W) |\; L \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Für $L \in \mathcal{B}(V, W)$ setzen wir

$$\|L\|_{V \to W} := \inf\{C \geq 0 |\; \forall x \in V : \; \|L(x)\|_W \leq C\|x\|_V\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{V\to W} : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(V, W)$ ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass $\|\cdot\|_{V\to W}$ eine Norm ist, wenn auch $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist.

Die (Halb-)Norm $\|\cdot\|_{V\to W} : \mathcal{B}(V, W) \to \mathbb{R}$ wird *Operator(halb-)norm* auf $\mathcal{B}(V, W)$ genannt. **[10 Punkte]**

5.4 Matrixnorm. Es sei $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n,\; j=1,\dots,m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ eine $n \times m$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$ und $L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $L_A(x) = Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie

$$\|L_A\|_{2\to 2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|^2}$$

für die Operatornorm $\|L_A\|_{2\to 2}$ von $L_A : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
Hinweis: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass

$$\|L_A\|_{2\to 2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{i,j}|^2}$$

möglich ist. **[10 Punkte]**

5.5 Submultiplikativität der Operatornorm. Es seien $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Weiter seien $L : (U, \|\cdot\|_U) \to (V, \|\cdot\|_V)$ und $M : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ stetige lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Operatornormen $\|\cdot\|_{U\to V}$, $\|\cdot\|_{V\to W}$ und $\|\cdot\|_{U\to W}$ gilt:

$$\|M \circ L\|_{U\to W} \leq \|M\|_{V\to W}\|L\|_{U\to V}.$$

[10 Punkte]

5.6 Gleichmäßige Stetigkeit von + und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ in der p-adischen Metrik. Es sei p eine Primzahl und $d_p : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die p-adische Metrik aus Beispiel 1.2.3 im Skript, sowie $v_p(k) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Vielfachheit p in der Primfaktorzerlegung von $k \in \mathbb{Z}$. Weiter sei d die Produktmetrik zu d_p auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$v_p(kl) = v_p(k) + v_p(l).$$

Sie dürfen dabei aus der elementaren Zahlentheorie für ganze Zahlen m, n als bekannt voraussetzen, dass mn nicht durch p teilbar ist, wenn m und n nicht durch p teilbar sind.

(b) Folgern Sie, dass die arithmetischen Operationen

$$+ : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p) \text{ und } \cdot : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p)$$

gleichmäßig stetig sind. **[10 Punkte]**

5.7 Studieren Sie den Beweis der Vollständigkeit des Raums $(\mathrm{CF}_M, d_{\mathrm{CF}})$ im Skript (Aussage 2 von Lemma 1.118, Seiten 48–51).

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 27.05.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.