Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 4
10.05.2013

Übungen zur Analysis 2

4.1 Es sei (M, d) ein halbmetrischer Raum, $x \in M$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $B_r^d(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq r\}$ eine abgeschlossene Menge mit $B_r^d(x) \supseteq \overline{U_r^d(x)}$ ist. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $B_r^d(x) \neq \overline{U_r^d(x)}$ gelten kann. Zeigen Sie jedoch, dass in einem *halbnormierten* Raum $B_r^d(x) = \overline{U_r^d(x)}$ gilt.

Sei (M,d) ein halbmetrischer Raum, $B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) \leq r\}$ sowie $U_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$, für $x \in M$. Wir wollen zeigen

(i) $B_r(x)$ ist abgeschlossen

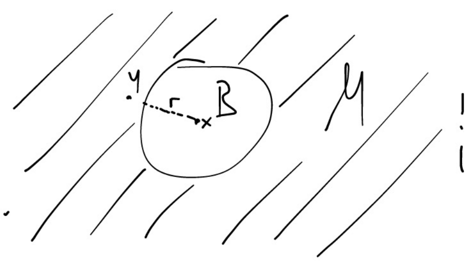
(ii) $\overline{U_r(x)} \subset B_r(x)$

(iii) i.A. gilt aber $\overline{U_r(x)} \neq B_r(x)$

(iv) Ist M ein halbnormierter Raum, so gilt $\overline{U_r(x)} = B_r(x)$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $B := B_r(x)$, $U := U_r(x)$

Zu (i): $M \setminus B$ ist offen: Sei $y \in M\setminus B$, dann ist $d(x,y) > r$, d.h. es gibt $\varepsilon > 0$ mit $d(x,y) \geq r+\varepsilon$ und somit $U_\varepsilon(y) \subset M \setminus B$ denn für $z \in U_\varepsilon(y)$, $d(z,x) \geq \underbrace{d(x,y)}_{= r+\varepsilon} - \underbrace{d(z,y)}_{< \varepsilon} > r$.



Zu (ii): $\overline{U} \subset B$

$\overline{U}$ ist per Definition in allen abgeschlossenen Teilmengen $A \subset M$ mit $U \subset A$ enthalten. Da B abgeschlossen ist und $U \subset B$, ist B eine solche Menge.

Zu (iii): Sei $M = \mathbb{R}$ ausgestattet mit der diskreten Metrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 &, x \neq y \\ 0 &, x = y \end{cases}$$

. Dann gilt für beliebige

$$x \in \mathbb{R}: \overline{U_1(x)} = \overline{\{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < 1\}} = \overline{\{x\}} = \{x\}, \text{ aber}$$

$$B_1(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) \leq 1\} = \mathbb{R} \neq \{x\}.$$

Zu (iv): Sei $(M,d) = (M, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum.

Wegen (ii) müssen wir nur noch $B \subset \overline{U}$ zeigen.

Sei $y \in B = B_r(x)$. Um $y \in \overline{U}$ zu zeigen, benutzen wir die metrische Charakterisierung von Berührpunkten, die in einfacher Weise aus Aufgabe 3.6 folgt:

Sei (M,d) ein halbmetrischer Raum, und $N \subset M$. Dann

$$x \in \overline{N} \iff \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \cap N \neq \emptyset$$

Beweis: Nach Aufgabe 3.6 müssen wir nur folgende Äquivalenz zeigen:

Jede Umgebung von x trifft N $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) \cap N \neq \emptyset$

D.h. statt auf Umgebungen (U Umgebung von $x :\Longleftrightarrow x \in U^\circ$), genügt es, die Aussage auf den (offenen) ε-Umgebungen von x zu testen:

($\Rightarrow$) Ist klar, da $U_\varepsilon(x)$ selbst Umgebungen sind ($x \in U_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x)^\circ$)

($\Leftarrow$) Sei U eine Umgebung von x, d.h. $\exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $U_\varepsilon(x) \subset U^\circ \subset U$.
Da $U_\varepsilon(x) \cap N \neq \emptyset$ und $U \cap N \supset U_\varepsilon(x) \cap N$, ist auch $U \cap N \neq \emptyset$.

Wir müssen also zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(y) \cap U$ nicht leer ist.
Angenommen $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(y) \cap U = \emptyset$, dann gilt $\forall z \in U_\varepsilon(y)$ $z \notin U = U_r(x)$, d.h. $\|z - x\| \geq r$. Definieren wir $z := y + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \frac{x-y}{\|x-y\|}$ wobei $\tilde{\varepsilon} := \min\{\|x-y\|, \varepsilon\}$, so gilt $\|z - y\| = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\frac{\|x-y\|}{\|x-y\|} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < \varepsilon$, d.h. $z \in U_\varepsilon(y)$, sowie

$$\|x - z\| = \left\|x - y - \frac{x-y}{\|x-y\|}\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right\| = \left|\|x-y\| - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right| \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|} = \|x-y\| - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \leq r - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < r$$

was im Widerspruch steht zu $\|x - z\| \geq r$ $\forall z \in U_\varepsilon(y)$. $\square$

4.2 Es sei p eine Primzahl und d_p die p-adische Metrik auf $\mathbb{Z}$ aus Beispiel 1.2.3. im Skript. Beweisen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $k + p\mathbb{Z} = \{k + pz | z \in \mathbb{Z}\}$ offen und abgeschlossen bezüglich d_p ist.

Wir statten $\mathbb{Z}$ mit der Metrik d_p aus Bsp. 1.2.3 aus, die sog. p-adische Metrik, wobei p eine gegebene Primzahl ist.
Sei $v_p: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Abb., die $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Vielfachheit von p in der Primfaktorzerlegung von k zuordnet, sowie $v_p(0) := \infty$.

($\Rightarrow k = p_1^{v_{p_1}(k)} \cdots p_N^{v_{p_N}(k)}$, wenn k N verschiedene Primfaktoren hat)

Dann ist d_p gegeben durch

$$d_p : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ d_p(x,y) := p^{-v_p(x-y)}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$, sei $\Omega_k := k + p\mathbb{Z} = \{k + pz \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

<u>Beh.</u>: Ω_k ist gleichzeitig offen und abgeschlossen bzgl. d_p

<u>Beweis</u>: (i) Ω_k ist offen:

Sei $m \in \Omega_k$, d.h. $\exists\, z \in \mathbb{Z}$ mit $m = k + pz$. Wir müssen ein $\varepsilon > 0$ finden, s.d. $U_\varepsilon(m) \subset \Omega_k$. Wir zeigen: $U_{1/p}(m) \subset \Omega_k$.
Sei $n \in U_{1/p}(m)$, d.h. $d_p(n,m) < \frac{1}{p}$, also $p^{v_p(n-m)} > p$.
Insbesondere gilt $p^{v_p(n-m)-1} \in \mathbb{N}$.
Weiter gilt: $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ mit $n - m = p^{v_p(n-m)} \cdot l$, und damit

$$\begin{aligned} n &= n - m + m = p^{v_p(n-m)} l + k + pz \\ &= k + p\underbrace{\left(p^{v_p(n-m)-1} l + z\right)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Also ist $n \in \Omega_k$ und damit $U_{1/p}(m) \subset \Omega_k$. $\square$

(ii) Ω_k ist abgeschlossen:

Sei n ein Berührpunkt von Ω_k, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(n) \cap \Omega_k \neq \emptyset$.
Insbesondere $\exists\, m \in U_{1/p}(n) \cap \Omega_k$, d.h. $m = k + p\tilde{z}$ für ein $\tilde{z} \in \mathbb{Z}$ sowie $d_p(n,m) < \frac{1}{p}$. Dann folgt genau wie in (i): $n \in \Omega_k$. Also gilt $\overline{\Omega_k} = \Omega_k$, d.h. Ω_k ist abgeschlossen. $\square$

4.3 Es sei I eine abzählbar unendliche Menge und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass der Raum

$$\mathbb{C}^{(I)} := \{(\alpha_j)_{j \in I} \in \mathbb{K}^I | \; \alpha_j = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in I\}$$

dicht in $(\ell^p(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$, aber nicht dicht in $(\ell^\infty(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Solution

By the definition, $\mathbb{C}^{(I)}$ is dense in $(\ell^p(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ if and only if $\overline{\mathbb{C}^{(I)}} = \ell^p(I, \mathbb{K})$. According to Remark 1.37 in the lecture, one has

$$f \in \overline{\mathbb{C}^{(I)}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \; U_\varepsilon^{d_p}(f) \cap \mathbb{C}^{(I)} \neq \emptyset, \tag{$*$}$$

where d_p is the metric associated to the norm $\|\cdot\|_p$, i.e. $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$. First we show that $\mathbb{C}^{(I)}$ is dense in $(\ell^p(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ for $1 \leq p < \infty$. For every $f \in \ell^p(I, \mathbb{K})$ and every $\varepsilon > 0$, there exists a finite subset $J \subset I$ such that $\left(\sum_{i \in I \setminus J} f(i)^p\right)^{1/p} < \varepsilon$ because $\left(\sum_{i \in I} f(i)^p\right)^{1/p} < \infty$, which means that the sequence of finite sum of this series is a Cauchy sequence (see Analysis I). We now define

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & i \in J \\ 0 & i \in I \setminus J \end{cases}$$

It is clear that $g \in \mathbb{C}^{(I)}$. Moreover, $g \in U_\varepsilon^{d_p}(f)$ since

$$\|f - g\|_p = \left(\sum_{i \in I \setminus J} f(i)^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

We conclude that $f \in \overline{\mathbb{C}^{(I)}}$ and therefore $\ell^p(I, \mathbb{K}) = \overline{\mathbb{C}^{(I)}}$ for $1 \leq p < \infty$.
Second we show that $\mathbb{C}^{(I)}$ is not dense in $(\ell^\infty(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$. Take

$$f(i) = 1, \quad \forall i \in I.$$

The function f is an element of $\ell^\infty(I, \mathbb{K})$ and $\|f\|_\infty = 1$. We claim that $U_{1/2}^{d_\infty}(f) \cap \mathbb{C}^{(I)} = \emptyset$. Let $g \in U_{1/2}^{d_\infty}(f)$. Hence,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{i \in I} |1 - g(i)| \leq \frac{1}{2}.$$

It is easy to see that for all $i \in I$, $g(i) \neq 0$. Therefore, $g \notin \mathbb{C}^{(I)}$ and $U_{1/2}^{d_\infty}(f) \cap \mathbb{C}^{(I)} = \emptyset$. According to $(*)$, $f \notin \overline{\mathbb{C}^{(I)}}$ and we conclude that $\overline{\mathbb{C}^{(I)}} \neq \ell^\infty(I, \mathbb{K})$.

4.4 Approximation Riemann-integrierbarer Funktionen durch stetige Funktionen. Es sei $(\mathcal{R}([a, b], \mathbb{K}), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ der Prähilbertraum der Riemann-integrierbaren Funktionen aus Beispiel 1.17 im Skript. Zeigen Sie, dass $C([a, b], \mathbb{K})$ dicht in $(\mathcal{R}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ ist. Zeigen Sie dazu zuerst, dass sich jede Indikatorfunktion 1_I eines Intervalls $I \subseteq [a, b]$ in der 2-Norm beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren lässt. Betrachten Sie dazu die Funktionen

$$f_n(x) := \max\{1 - n \operatorname{dist}(x, I), 0\} \text{ für } n \in \mathbb{N}, x \in [a, b],$$

wobei $\operatorname{dist}(x, I) = \inf\{|x - y| \; |y \; \in I\}$ den Abstand von x zu I bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass jede Treppenfunktion im Abschluss von $C([a, b], \mathbb{K})$ in $(\mathcal{R}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ liegt. Zeigen Sie dann, dass der Raum der Treppenfunktionen dicht in $(\mathcal{R}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ liegt.

Solution

The goal is to show that $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ is a dense subset of $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K})$ i.e. $\overline{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})} = \mathcal{R}([a,b],\mathbb{K})$, where $\mathbb{K} = \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. We first show this exercise for $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ following the steps below. At the end we explain how the other case, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, can be simply proved in a similar fashion.

1- Let 1_I be the indicator function of the interval $I \subseteq [a,b]$. Let $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a family of continuous functions defined as

$$f_n(x) = \max\{1 - n\mathrm{dist}(x,I), 0\},$$

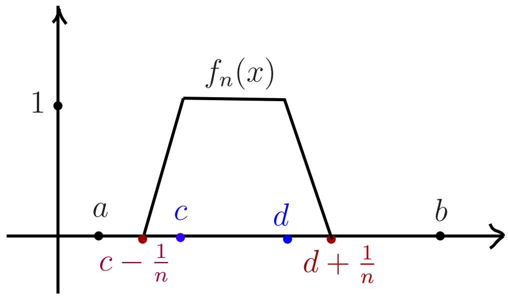
where $\mathrm{dist}(x,I) = \inf\{|x-y| : y \in I\}$. We shall see $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 1_I$. Note that

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 < f_n(x) < 1 & x \in J := \{x \in [a,b] \setminus I : 0 < \mathrm{dist}(x,I) < \frac{1}{n}\} \\ 0 & \mathrm{dist}(x,I) \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

See the figure below. Hence,

$$\begin{aligned}\|f_n - 1_I\|_2 &= \left(\int_a^b |f_n(x) - 1_I(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_J |f_n(x) - 1_I(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_J dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Therefore, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} 1_I$.



2- Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a step function. Each step function can be written as a finite sum of indicator functions, i.e. $f(x) = \sum_{i=1}^n 1_{I_i}(x)$, where I_i are disjoint intervals in $[a,b]$. Using the previous step, there exist $f_{k_i} \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ such that $f_{k_i} \xrightarrow[k_i\to\infty]{\|\cdot\|_2} 1_{I_i}$, $i = 1,\dots,n$. Therefore, $\sum_i f_{k_i} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \sum_i I_i = f(x)$, when $k_i \to \infty$ for all $i = 1,\dots,n$. Denote the space of step functions by $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$. We have proved that for every $f \in \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$ and every $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon^{d_2}(f) \cap \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \neq \emptyset$. According to $(*)$, we conclude that $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}$.

3- Recall the definition of Riemann integrability from Analysis I (see Definition 5.4, Analysis I), the Riemann integral of $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ is equal to

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\substack{g\in\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})\\ g\leq f}} \int_a^b g(x)dx.$$

Therefore, for every $f \in \mathcal{R}([0,1],\mathbb{K})$ there exists an increasing family of step functions $\{g_n\} \subset \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$ (i.e. $g_n \leq g_{n+1}$) such that for every $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq n_0$

$$\int_a^b f(x) - g_n(x)dx = \int_a^b |f(x) - g_n(x)|dx < \varepsilon.$$

Since $\{g_n\}$ is an increasing family, one has $f(x) - g_n(x) \leq f(x) - g_1(x)$, for all $n \geq 1$ (Note that f is a bounded function). Hence, for every $\varepsilon > 0$ and $n \geq n_0$

$$\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2 dx \leq \sup_{x\in[a,b]} (f(x) - g_1(x)) \int_a^b |f(x) - g_n(x)|dx \leq \varepsilon.$$

As a result, $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathcal{T}(([a,b]),\mathbb{R})}$ and therefore, $\overline{\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})} = \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. We have already proved that $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}$ in the part 2. We conclude $\overline{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})} = \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$.

It remains the case $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Recall Definition 5.9. Analysis I, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ is Riemann integrable if and only if $\mathrm{Re}f(x)$ and $\mathrm{Im}f(x)$ are belong to $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. According to what we have proved in the previous steps, there exist $\{g_n\}$ and $\{h_n\} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ such that $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} \mathrm{Re}f$, and $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} \mathrm{Im}f$. Take $\{g_n + ih_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. One can show that

$$g_n + ih_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f.$$

Indeed,

$$\int_a^b |\left(\mathrm{Re}f(x) - g_n(x)\right) + i\left(\mathrm{Im}f(x) - h_n(x)\right)|^2 dx \leq \int_a^b |\left(\mathrm{Re}f(x) - g_n(x)\right)|^2 dx + \int_a^b |\left(\mathrm{Im}f(x) - h_n(x)\right)|^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} 0.$$

Therefore, $\overline{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})} = \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. It completes the proof.

4.5 Stetige Abbildungen reißen Berührpunkte nicht ab. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M,\mathcal{T}_M) \to (N,\mathcal{T}_N)$ genau dann stetig in $x \in M$ ist, wenn für alle Mengen $A \subseteq M$, die x als Berührpunkt bzgl. $\mathcal{T}_M$ besitzen, gilt: $f(x)$ ist ein Berührpunkt von $f[A]$ bzgl. $\mathcal{T}_N$. Folgern Sie: $f : (M,\mathcal{T}_M) \to (N,\mathcal{T}_N)$ ist genau dann stetig, wenn wenn für alle Mengen $A \subseteq M$ gilt: $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

4.5. „f stetig in x“ $:\Leftrightarrow$

$\forall\, Y \in \mathcal{T}_N : \big(Y \ni f(x) \Rightarrow$

$\exists\, U \in \mathcal{T}_M : U \subset f^{-1}[Y] \big)$.

„$f(x)$ ist BP von $Y \subset N$“ $:\Leftrightarrow$

$\forall\, \tilde{Y} \in \mathcal{T}_N : \tilde{Y} \ni f(x) \Rightarrow \tilde{Y} \cap Y \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$"

Sei x BP von $X \subset \Omega$. D.h.

$\forall \tilde{X} \in \mathcal{T}_\Omega : \tilde{X} \ni x \Rightarrow \tilde{X} \cap X \neq \emptyset$.

Betrachte $f[X] =: Y$ und $f(x)$.

Sei $\tilde{Y} \in \mathcal{T}_N$ beliebig mit $\tilde{Y} \ni f(x)$.

z.z. ist nun: $\tilde{Y} \cap Y \neq \emptyset$.

Betrachte dazu

$$f^{-1}[\tilde{Y}] \ni x .$$

Wegen der Stet. $\exists \tilde{X} \in \mathcal{T}_\Omega$ mit $\tilde{X} \subset f^{-1}[\tilde{Y}]$

$$\tilde{X} \cap X \neq \emptyset .$$

$\Rightarrow f[\tilde{X}] \cap f[X] \supset f[\tilde{X} \cap X] \neq \emptyset$

weil $f[\tilde{X}] \subset f f^{-1}[\tilde{Y}] = \tilde{Y} \Rightarrow \tilde{Y} \cap Y \neq \emptyset$.

„$\Leftarrow$" Sei nun f nicht stetig

in x. D.h.

(*) $\exists Y \in \mathcal{T}_N : (Y \ni f(x) \wedge$
$\forall U \in \mathcal{T}_\Omega : U \ni x \Rightarrow U \not\subset f^{-1}[Y])$

(d.h. es gibt keine offene Menge um x, die ganz $f^{-1}[Y]$ enthält.)

Wir betrachten das Komplement von $f^{-1}[Y]$. $\Pi \setminus f^{-1}[Y] =: V$.

Behauptung: x ist BP von V aber $f(x)$ nicht BP von $f[V]$.

Bew. hierfür:

Sei $X \in \tau_\Pi$ mit $X \ni x$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} X \not\subset f^{-1}[Y] \Leftrightarrow X \cap V \neq \emptyset$.

Also x BP von V.

Weil $Y \cap f(V) = \underbrace{f(\Pi \setminus f^{-1}[Y])}_{\subset N \setminus Y} = \emptyset$,

ist $f(x)$ nicht BP von $f[V]$. $\square$

Wir haben gezeigt:

(*) „f stetig in $x \Rightarrow x$ wird als BP nicht abgerissen."

Daraus folgt:

Daraus folgt:

„⇒" f stetig in ganz M (d.h. in $\forall x \in M$) ⇒ $(X \subset M)$

$f(\overline{X}) = f(\{\text{Berührpunkte von } X\})$

$\overset{(*)}{\subseteq} \{\text{Berührpunkte von } f(X)\} = \overline{f(X)}$

„⇐" Sei $x \in M$ beliebig; $X \subset M$ mit x ist BP von X. D.h. $x \in \overline{X}$.

Weil $f[\overline{X}] \subset \overline{f[X]}$, ⇒

$f(x) \in f[\overline{X}] \subset \overline{f[X]}$, also

$f(x)$ BP von $f[X]$.

Also ist f stetig in x,

also überall. ⧄

4.6 (a) **Charakterisierung der Stetigkeit mit Urbildern abgeschlossener Mengen.** Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M, \mathcal{T}_M) \to (N, \mathcal{T}_N)$ zwischen zwei topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn für alle bzgl. $\mathcal{T}_N$ abgeschlossenen Mengen $A \subseteq N$ das Urbild $f^{-1}[A]$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_M$ ist.

(b) **Typische Anwendungsbeispiele:**

(i) Es sei $L : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$. Zeigen Sie, dass der Kern von L abgeschlossen in V ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Einheitsphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$ ist.

4.6. a. Das ist ganz einfach nur das Vertauschen von Urbild und Komplement:

A ~~[illegible]~~ $\subset N$ abg. ~~[illegible]~~
stet.
$:\Leftrightarrow N \setminus A \in \tau_N \Rightarrow f^{-1}(N \setminus A)$
$\in \tau_M$. Weil $f^{-1}(N \setminus A) = M \setminus f^{-1}(A)$,
ist $f^{-1}(A)$ abg.

Umgekehrt genauso.

b. i. $\operatorname{Ker}(L) := \{ v \in V \mid L(v) = 0_W \}$
$= L^{-1}\{0_W\}$. Weil $W \setminus \{0_W\}$
offen ist (Argument: für $w \neq 0_W$ ist $B_{\frac{\|w\|}{2}}(w) \subset W \setminus \{0_W\}$),
folgt mit a) die Beh.

ii. Dazu betrachten wir die Standard-Norm im $\mathbb{R}^3$:

$$\| \ \|_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wir wissen, dass die Stetig ist (bzgl. der von ihr selbst erzeugten Standardtop.). Denn das Urbild ist δ^{-1} [illegible] der adj. Menge $\{1\}$.

4.7 Studieren Sie den Abschnitt 1.6 über Initial- und Finaltopologien im Skript (Seite 33 unten bis Seite 39).

Lösung: Klar!