Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 4
10.05.2013

Übungen zur Analysis 2

4.1 Es sei (M,d) ein halbmetrischer Raum, $x \in M$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $B_r^d(x) := \{y \in M|\ d(x,y) \leq r\}$ eine abgeschlossene Menge mit $B_r^d(x) \supseteq \overline{U_r^d(x)}$ ist. Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass $B_r^d(x) \neq \overline{U_r^d(x)}$ gelten kann. Zeigen Sie jedoch, dass in einem *halbnormierten* Raum $B_r^d(x) = \overline{U_r^d(x)}$ gilt.

4.2 Es sei p eine Primzahl und d_p die p-adische Metrik auf $\mathbb{Z}$ aus Beispiel 1.2.3. im Skript. Beweisen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $k + p\mathbb{Z} = \{k + pz | z \in \mathbb{Z}\}$ offen und abgeschlossen bezüglich d_p ist.

4.3 Es sei I eine abzählbar unendliche Menge und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass der Raum

$$\mathbb{C}^{(I)} := \{(\alpha_j)_{j\in I} \in \mathbb{K}^I |\ \alpha_j = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in I\}$$

dicht in $(\ell^p(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p < \infty$, aber nicht dicht in $(\ell^\infty(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist.

4.4 **Approximation Riemann-integrierbarer Funktionen durch stetige Funktionen.** Es sei $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der Prähilbertraum der Riemann-integrierbaren Funktionen aus Beispiel 1.17 im Skript. Zeigen Sie, dass $C([a,b],\mathbb{K})$ dicht in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ ist. Zeigen Sie dazu zuerst, dass sich jede Indikatorfunktion 1_I eines Intervalls $I \subseteq [a,b]$ in der 2-Norm beliebig genau durch stetige Funktionen approximieren lässt. Betrachten Sie dazu die Funktionen

$$f_n(x) := \max\{1 - n\,\mathrm{dist}(x,I), 0\} \text{ für } n \in \mathbb{N}, x \in [a,b],$$

wobei $\mathrm{dist}(x,I) = \inf\{|x-y|\ |y \ \in I\}$ den Abstand von x zu I bezeichnet. Folgern Sie daraus, dass jede Treppenfunktion im Abschluss von $C([a,b],\mathbb{K})$ in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ liegt. Zeigen Sie dann, dass der Raum der Treppenfunktionen dicht in $(\mathcal{R}([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ liegt.

4.5 **Stetige Abbildungen reißen Berührpunkte nicht ab.** Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M,\mathcal{T}_M) \to (N,\mathcal{T}_N)$ genau dann stetig in $x \in M$ ist, wenn für alle Mengen $A \subseteq M$, die x als Berührpunkt bzgl. $\mathcal{T}_M$ besitzen, gilt: $f(x)$ ist ein Berührpunkt von $f[A]$ bzgl. $\mathcal{T}_N$. Folgern Sie: $f : (M,\mathcal{T}_M) \to (N,\mathcal{T}_N)$ ist genau dann stetig, wenn wenn für alle Mengen $A \subseteq M$ gilt: $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

4.6 (a) **Charakterisierung der Stetigkeit mit Urbildern abgeschlossener Mengen.** Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : (M,\mathcal{T}_M) \to (N,\mathcal{T}_N)$ zwischen zwei topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn für alle bzgl. $\mathcal{T}_N$ abgeschlossenen Mengen $A \subseteq N$ das Urbild $f^{-1}[A]$ abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}_M$ ist.

(b) **Typische Anwendungsbeispiele:**

(i) Es sei $L : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen zwei normierten Räumen $(V,\|\cdot\|_V)$ und $(W,\|\cdot\|_W)$. Zeigen Sie, dass der Kern von L abgeschlossen in V ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Einheitsphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$ ist.

4.7 Studieren Sie den Abschnitt 1.6 über Initial- und Finaltopologien im Skript (Seite 33 unten bis Seite 39).

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 20.05.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.