Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 3
03.04.2013

Übungen zur Analysis 2

3.1 Abstraktion des Beweises der Minkowskiungleichung. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. $V' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ bezeichne den Dualraum von V, also die Menge aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K}$ (synonym: Linearformen auf V). Weiter sei $\mathcal{B} \subseteq V'$ eine nichtleere Menge von Linearformen, und es gelte für alle $x \in V$:

$$\|x\| = \sup\{|H(x)| \mid H \in \mathcal{B}\}.$$

Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf V ist.

Lösung

Wegen $|B(x)| \geq 0, \forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in V$ folgt Nichtnegativität, d. h. $\|x\| \geq 0$. Weiter folgt aus der Linearität $|B(\lambda x)| = |\lambda||B(x)|, \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ und $\lambda \sup(\cdot) = \sup(\lambda \cdot)$ Linearität von $\|\cdot\|$. Die Dreiecksungleichung ergibt sich schließlich zu

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sup\{|B(x+y)| | B \in \mathcal{B}\} \\
&\leq \sup\{ \underbrace{|B(x)|}_{\leq \sup_{B' \in \mathcal{B}} |B'(x)|} + \underbrace{|B(y)|}_{\leq \sup_{B'' \in \mathcal{B}} |B''(y)|} | B \in \mathcal{B}\} \\
&\leq \sup_{B' \in \mathcal{B}} |B'(x)| + \sup_{B'' \in \mathcal{B}} |B''(y)| = \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

3.2 Es seien $1 \leq p < \infty$ und $-\infty < a < b < \infty$. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p : C([a,b], \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$.

Mit Aufgabe 2.5 gilt:

Seien p konjugiert zu q,

$B := \{ f \in C([a,b], \mathbb{K}) \mid \|f\|_q \leq 1 \}$

$$\|f+g\|_p = \sup\left\{ \int_a^b |(f(x)+g(x))h(x)| dx \;\middle|\; h \in B \right\}$$

$$\le \sup \left\{ \int_a^b |f(x)h(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)h(x)|\,dx \;\middle|\; h \in B \right\}$$

$$\le \sup \left\{ \int_a^b |fh|\,dh \;\middle|\; h \in B \right\} + \sup \left\{ \int_a^b |gh|\,dx \;\middle|\; h \in B \right\}$$

$$= \|f\|_p + \|g\|_p .$$

(Wers nicht lesen kann: Ist (Corollar 1.25.)

3.3 Geben Sie (mit Beweis) eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ an, die die aus der Analysis 1 bekannte Topologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erzeugt.

Lösung

Nach 2.11 der Analysis I Vorlesung ist $U \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ offen genau dann, wenn

(a) $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und

(b) für $\infty \in U \; \exists r > 0 \; \forall x \in \mathbb{C} : x > r \Rightarrow x \in U$.

Aus 1.3.4 der Analysis I Vorlesung ist die stereographe Projektion - eine Bijektion - bekannt

$$\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2, \; a + bi \mapsto \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} \right), \; \infty \mapsto (0,0,1).$$

Wir sehen, dass eine Scheibenumgebung des Nordpols durch die Projektion in das Komplement einer abgeschlossenen Scheibe um 0 in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ übergeht. D. h. die entsprechende Metrik auf der Sphäre induziert unsere Standardmetrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Kreise auf der Sphäre gehen unter der Projektion in Kegelschnitte über, die im Allgemeinen keine Kreise mehr sind. Wie wir auf Blatt 1 gesehen haben lässt sich schon die Länge von Ellipsenbögen nur sehr schwer (und oft nur numerisch) berechnen, d. h. eine Abstandsdefinition über die Länge des kürzesten Bogens ist für uns vorerst außer Reichweite. Stattdessen berechnen wir als Abstand die Länge der Sekante durch unsere beiden Punkte. Genauer: Seien $x, y \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= \sqrt{2 - 2(\varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(x)\varphi_2(y) + \varphi_3(x)\varphi_3(y))} \\
&= \sqrt{2 - \frac{2\left(4\mathrm{Re}(x)\mathrm{Re}(y) + 4\mathrm{Im}(x)\mathrm{Im}(y) + (|x|^2 - 1)(|y|^2 - 1)\right)}{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}} \\
&= \frac{2\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\mathrm{Re}(x)\mathrm{Re}(y) - 2\mathrm{Im}(x)\mathrm{Im}(y)}}{\sqrt{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}} \\
&= \frac{2\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\mathrm{Re}(x\overline{y})}}{\sqrt{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}} \\
&= \frac{2|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}} \\
|\varphi(x) - \varphi(\infty)| &= \sqrt{2 + \frac{-2(|x|^2 - 1)}{1 + |x|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + |x|^2}}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Metrik

$$d(x, y) := \frac{2|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x, y \neq \infty,$$

$$d(x, \infty) := \frac{2}{\sqrt{1 + |x|^2}}.$$

Seien, $x, y, z \in \mathbb{C}$. Es ist klar, dass d positiv-definit und symmetrisch ist. Für die Dreiecksungleichung verwende man

$$(x - z)(1 + y\overline{y}) = x - z + xy\overline{y} - y\overline{y}z = (x - y)(1 + \overline{y}z) + (y - z)(1 + x\overline{y}) \tag{1}$$

$$|1 + \overline{y}z|^2 \leq 1 + |y|^2|z|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}(y\overline{z})}_{\leq |y|^2 + |z|^2} \leq (1 + |y|^2)(1 + |z|^2) \tag{2}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
|x - z|(1 + |y|^2) &\overset{(1)}{\leq} |x - y||1 + \overline{y}z| + |y - z||1 + x\overline{y}| \\
&\overset{(2)}{\leq} |x - y|\sqrt{|1 + |y|^2}\sqrt{|1 + |z|^2} + |y - z|\sqrt{|1 + |x|^2}\sqrt{|1 + |y|^2}.
\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $\frac{2}{\sqrt{|1+|x|^2}\sqrt{|1+|y|^2}\sqrt{|1+|z|^2}}$ erhalten wir die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Wegen

$$d(x, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|1 + |x|^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{2\left|\frac{x}{y} - 1\right|}{\sqrt{|1 + |x|^2}\sqrt{\frac{1}{|y|^2} + 1}} = \lim_{y \to \infty} d(x, y), \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

ist d schon eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Sei d' die Betragsmetrik auf $\mathbb{C}$. Für $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ folgt für alle $x \in U \cap \mathbb{C}$ schon $U_\varepsilon^{d'}(x) \subset U_\delta^d(x)$.

Für die Umkehrung im Fall $x \neq 0$, sei zunächst $\varepsilon \leq \frac{|x|\sqrt{1+4|x|^2}}{\sqrt{1+|x|^2}}$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+4|x|^2}} \Rightarrow$ $\delta \leq \frac{|x|}{1+|x|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$. Dann gilt

$$\frac{2||x|-|y||}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}} \leq d(x,y) < \delta \Rightarrow 0 < (\delta^2(1+|x|^2)-4)|y|^2+8|x||y|+(\delta^2(1+|x|^2)-4|x|^2)$$

$$\Rightarrow |y| < \frac{4|x|+\delta(1+|x|^2)\sqrt{(4-\delta^2)}}{4-\delta^2(1+|x|^2)} \leq \frac{6|x|}{3} = 2|x|$$

D. h. für $x \in U \cap \mathbb{C}$ folgt aus $d(x,y) < \delta$

$$|x-y| < \delta\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+4|x|^2} = \varepsilon, \quad U^d_\delta(x) \subset U^{d'}_\varepsilon(x).$$

Ist $x = 0$, so liefert $\delta := \varepsilon$ für $\varepsilon < 1$ dasselbe Ergebnis.[1]
Für $\infty \in U,\ \delta < 1,\ U^d_\delta(\infty) \subset U$ und $|y| > r := \sqrt{\frac{2}{\delta^2}-1}$ gilt weiter

$$r = \sqrt{\frac{2}{\delta^2}-1} < |y| \Rightarrow 2 < \delta^2(1+|y|^2) \Rightarrow y \in U^d_\delta(\infty) \Rightarrow y \in U$$

und ebenso folgt aus $U^c \subset \overline{U^{d'}_r(0)}$, dass für $\delta < \sqrt{\frac{2}{r^2+1}}$ schon $U^d_\delta(\infty) \subset U$.

3.4 Es sei (M,d) ein halbmetrischer Raum und $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass durch

$$d_1 : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{a+d(x,y)}$$

und durch

$$d_2 : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d_2(x,y) = \min\{d(x,y), a\}$$

Halbmetriken auf M gegeben werden, die die gleiche Topologie wie d erzeugen.

Solution

It is easy to see that $\forall x,y \in M$, $d_i(x,y) \geq 0$, and $d_i(x,y) = d_i(y,x)$. Also $\forall x \in M, d_i(x,x) = 0, i = 1,2$. Indeed, these properties can be easily checked using the fact that d is a semi-metric and $a > 0$. It remains to show the triangle inequality for d_i, $i = 1,2$. First we prove the triangle inequality for d_1. Let $f(x) = \frac{x}{a+x}$, where $a \in \mathbb{R}^+$ is a positive constant. The function $f(x)$ is an increasing function for all $x \geq 0$ i.e. $\forall 0 \leq x \leq y,\ f(x) \leq f(y)$. Moreover,

$$f(x+y) = \frac{x}{a+x+y} + \frac{y}{a+x+y} \leq \frac{x}{a+x} + \frac{y}{a+y} = f(x)+f(y).$$

We apply these properties of f to prove that d_1 satisfies the triangle inequality. For every $x,y,z \in M$, $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ since d is a semi-metric. Hence,

$$f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)+d(z,y)) \leq f(d(x,z))+f(d(z,y)).$$

It completes the triangle inequality for d_1 and therefore, d_1 is a semi-metric.

[1] $|x-y| = |y| < \frac{\delta}{\sqrt{4-\delta^2}} < \varepsilon$.

We now verify the trianle inequality for d_2. For every $x, y, z \in M$,

$$\begin{aligned} d_2(x,y) = \min\{a, d(x,y)\} &\leq \min\{a, d(x,z) + d(z,y)\} \\ &\leq \min\{a, d(x,z)\} + \min\{a, d(z,y)\} \\ &= d_2(x,z) + d_2(z,y) \end{aligned}$$

Therefore, d_2 is a semi-metric.

Let $\mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{d_1}$ and $\mathcal{T}_{d_2}$ be the topologies on M with respect to d, d_1 and d_2. We now show that this three topologies are equal.
First, we show that $\mathcal{T}_{d_i} \subseteq \mathcal{T}_d$, $i = 1, 2$. Let $U \in \mathcal{T}_{d_i}$. For every $x \in U$, there exists $\epsilon > 0$ such that $U_\epsilon^{d_i}(x) \subseteq U$. Note that $\forall x, y \in M,\ d_1(x,y) \leq \frac{d(x,y)}{a}$ and $d_2(x,y) \leq d(x,y)$. Set $a_1 = a$ and $a_2 = 1$. Then $U_{a_i\epsilon}^d(x) = \{y \in M : d(x,y) \leq a_i\epsilon\} \subseteq \{y \in M : d_i(x,y) \leq \epsilon\} = U_\epsilon^{d_i}(x)$. Indeed, $y \in U_{a_i\epsilon}^d(x)$ if and only if $d(x,y) \leq a_i\epsilon$. We have $d_i(x,y) \leq \frac{d(x,y)}{a_i} \leq \epsilon$, and $y \in U_\epsilon^{d_i}(x)$. We get,

$$U = \bigcup_{x \in U} U_{a_i\epsilon}^d(x) \in \mathcal{T}_d,$$

and therefore $\mathcal{T}_{d_i} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Second, we show that $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d_i}$ for $i = 1, 2$. Let $U \in \mathcal{T}_d$. For every $x \in U$, there exists $\epsilon > 0$ such that $U_\epsilon^d(x) \subseteq U$. We can assume $\epsilon < a$. Note that if $d(x,y) < a$ then it is clear that $d(x,y) = d_2(x,y)$. We also have $d(x,y) \leq 2ad_1(x,y)$. Indeed, if $d(x,y) < a$, then $\frac{2}{1+\frac{d(x,y)}{a}} \geq 1$. Therefore,

$$d(x,y) \leq \frac{2d(x,y)}{1 + \frac{d(x,y)}{a}} = \frac{2ad(x,y)}{a + d(x,y)} = 2ad_1(x,y).$$

Hence, $U_{\frac{\epsilon}{2a}}^{d_1}(x) \subseteq U_\epsilon^d(x)$ and $U_\epsilon^d(x) = U_\epsilon^{d_2}(x)$. We have

$$U = \bigcup_{x \in U} U_{\frac{\epsilon}{2a}}^{d_1}(x) = \bigcup_{x \in U} U_\epsilon^{d_2}(x) \in \mathcal{T}_{d_i}, \quad i = 1, 2.$$

In conclusion, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_i}$ for $i = 1, 2$.

3.5 Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $N \subseteq M$. Zeigen Sie:

(a) $N^\circ \subseteq N \subseteq \overline{N}$,
(b) $\partial N = \overline{N} \setminus N^\circ$,
(c) $M \setminus N^\circ = \overline{M \setminus N}$.

Solution

(a) By the definition of N°, every $x \in N^\circ$ is an inner point of N. Therefore, $N^\circ \subseteq N$. The second inclusion can also be drived just by the definition of $\overline{N}$. We have

$$\overline{N} = \bigcap_{A \subseteq M} A,$$

where A is a closed subset of M and $N \subseteq A$. Therefore, $N \subseteq \overline{N}$.

(b) Recall the definition $\partial N := \overline{N} \cap \overline{M \setminus N}$. Here, we use the result of the part (c), i.e. $M \setminus N^\circ = \overline{M \setminus N}$. By help of this result, we have

$$\overline{N} \cap \overline{M \setminus N} = \overline{N} \cap (M \setminus N^\circ) = \overline{N} \setminus N^\circ.$$

One has the last equality because $\forall A, B \subseteq M,\ A \setminus B = A \cap (M \setminus B)$.

(c) We prove this equality by showing the two inclusions. We know $N^\circ \subseteq N$ from the part (a). Hence, $M \setminus N^\circ \supseteq M \setminus N$ and $\overline{M \setminus N^\circ} \supseteq \overline{M \setminus N}$. The set $M \setminus N^\circ$ is a close set since it is a complement of an open set. Therefore, $\overline{M \setminus N^\circ} = M \setminus N^\circ \supseteq \overline{M \setminus N}$. Now, we show $M \setminus N^\circ \subseteq \overline{M \setminus N}$. Let $x \in M \setminus N^\circ$. Assume that $x \notin \overline{M \setminus N}$ and we shall get a contradiction. Since, $M \setminus N \subseteq \overline{M \setminus N}$ we have $M \setminus (\overline{M \setminus N}) \subseteq M \setminus (M \setminus N) = N$. Moreover $M \setminus (\overline{M \setminus N}) \subset N$ is an open subset of N containing x. Therefore, $x \in N^\circ$ and we get a contradiction.

3.6 Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass $x \in M$ genau dann ein Berührpunkt von $N \subseteq M$ ist, wenn jede Umgebung von x die Menge N trifft: $U \cap N \neq \emptyset$.

(b) Zeigen Sie, dass $N \subseteq M$ genau dann dicht in M ist, wenn für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq M$ gilt: $U \cap N \neq \emptyset$.

3.6. a) Nach Defi. ist die Menge der Berührpkt. $\overline{N}$

$$:= \bigcap_{\{U \supseteq N \text{ mit } U \text{ abg.}\} \ni U} U$$

$$= \bigcap_{\{M \setminus O \mid O \subseteq M \setminus N \text{ mit } O \text{ offen}\} \ni U} U$$

$$\overset{\text{de Morgan}}{=} M \setminus \Big(\underbrace{\bigcup_{\{O \subseteq M \setminus N \text{ mit } O \text{ offen}\} \ni O} O}_{(*)} \Big)$$

Wir müssen nur zeigen:

Jede Umgebung U von x trifft N

$$\Updownarrow$$

$$x \notin (*)$$

„$\Uparrow$" Sei U Umgebung von x mit $U \cap N = \emptyset$, dann enthält U eine offene O mit $O \subseteq M \setminus N$
$\Rightarrow x \in (*)$.

„$\Downarrow$" Falls $x \in (*)$, ist $(*)$ selbst (offene) Umgebung, die N nicht trifft: $(*) \cap N = \emptyset$.

b) Def: N dicht in M $\Longleftrightarrow$ $\overline{N} = M$. Mit a) wissen wir: $(*) = \emptyset$. Also $O \subseteq M \setminus N$ mit O offen $\Rightarrow O = \emptyset$.

Damit gilt für jede nichtleere Offene O: $\underbrace{O \cap N \neq \emptyset}$, und umgekehrt: Wenn für jedes O gilt, wird in $(*)$ nur über die leere Menge vereinigt.