

Übungen zur Analysis 2

3.1 Abstraktion des Beweises der Minkowskiungleichung. Es seien V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. $V' = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ bezeichne den Dualraum von V , also die Menge aller linearen Abbildungen von V nach \mathbb{K} (synonym: Linearformen auf V). Weiter sei $\mathcal{B} \subseteq V'$ eine nichtleere Menge von Linearformen, und es gelte für alle $x \in V$:

$$\|x\| = \sup\{|H(x)| \mid H \in \mathcal{B}\}.$$

Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf V ist.

3.2 Es seien $1 \leq p < \infty$ und $-\infty < a < b < \infty$. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p : C([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$.

3.3 Geben Sie (mit Beweis) eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ an, die die aus der Analysis 1 bekannte Topologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erzeugt.

3.4 Es sei (M, d) ein halbmétrischer Raum und $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass durch

$$d_1 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{a + d(x, y)}$$

und durch

$$d_2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = \min\{d(x, y), a\}$$

Halbmetriken auf M gegeben werden, die die gleiche Topologie wie d erzeugen.

3.5 Es sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $N \subseteq M$. Zeigen Sie:

- (a) $N^\circ \subseteq N \subseteq \overline{N}$,
- (b) $\partial N = \overline{N} \setminus N^\circ$,
- (c) $M \setminus N^\circ = \overline{M \setminus N}$.

3.6 Es sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

- (a) Zeigen Sie, dass $x \in M$ genau dann ein Berührungspunkt von $N \subseteq M$ ist, wenn jede Umgebung von x die Menge N trifft: $U \cap N \neq \emptyset$.
- (b) Zeigen Sie, dass $N \subseteq M$ genau dann dicht in M ist, wenn für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq M$ gilt: $U \cap N \neq \emptyset$.

3.7 Studieren Sie die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ im Beweis von Korollar 1.22 im Skript.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 13.05.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.