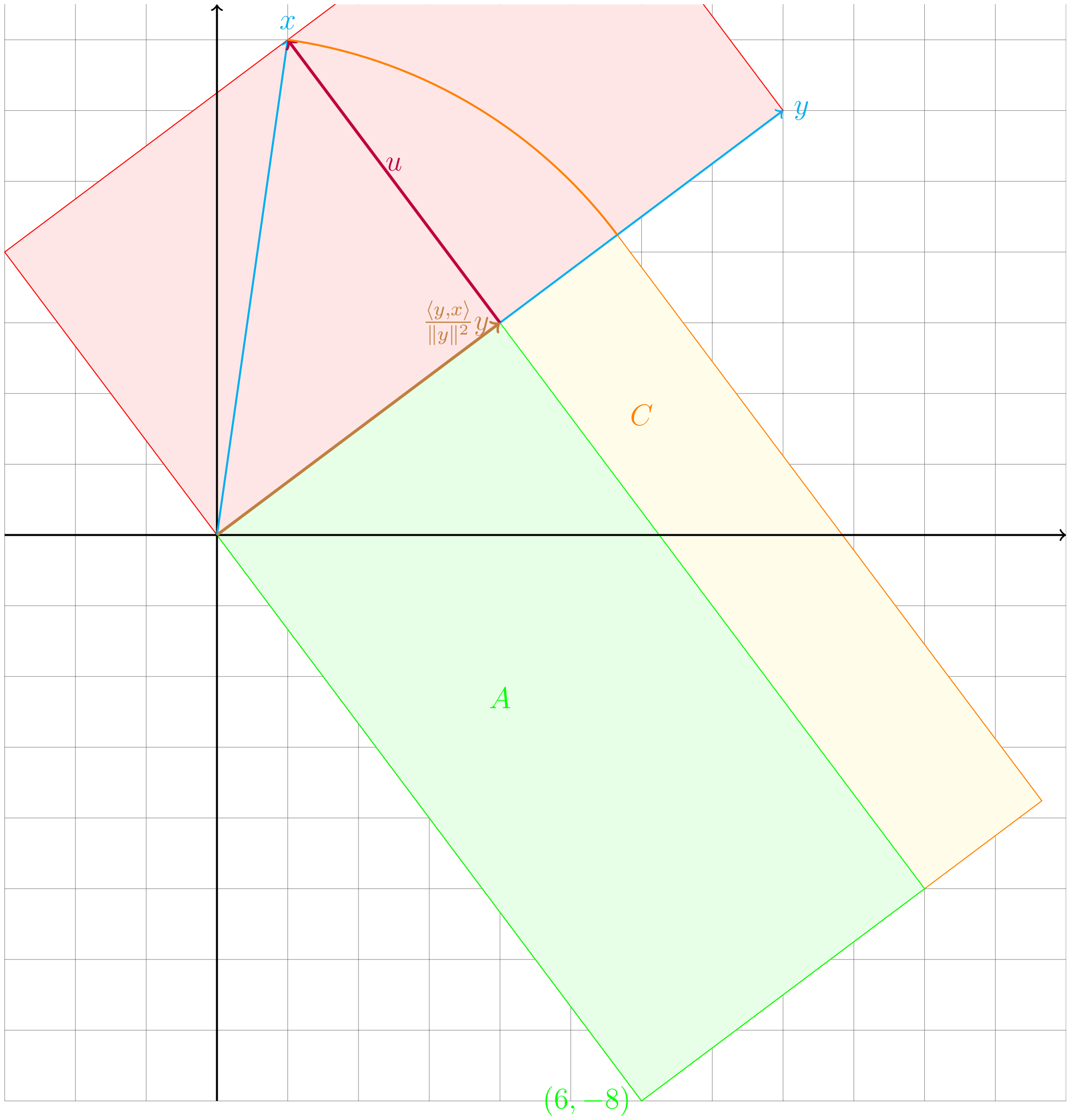
Übungen zur Analysis 2

2.1 Veranschaulichung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Gegeben seien die Vektoren $x = (1, 7)$ und $y = (8, 6)$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $u = x - \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} y$, wobei das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ und die zugehörigen Norm $\| \cdot \|$ gemeint sind. Veranschaulichen Sie sich x, y, $\frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} y$ und u mit einer Graphik. Veranschaulichen Sie mit der Graphik auch den Restterm $\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$ der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Lösung

Wir berechnen

$$u = x - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 8 + 7 \cdot 6}{8^2 + 6^2} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Sei A die Fläche des grünen Rechtecks, C die Fläche des gelben Rechtecks, und $B = A+C$. Es gilt

$$A = \left\| \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} y \right\| \cdot \|y\| = |\langle y, x\rangle| = \langle y, x\rangle,$$

da x, y nur positive Einträge haben. Die Fläche B ist $\|x\| \cdot \|y\|$. Somit ist die Differenzfläche $C = B - A$ gerade der Restterm $\|x\|\|y\| - \langle x, y\rangle$ der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Weiter erhalten wir den Flächeninhalt der roten Fläche als

$$\|u\|\|y\| = \sqrt{\left(\|x\|^2 + \frac{\langle y, x\rangle^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 - 2\frac{\langle y, x\rangle^2}{\|y\|^2}\right)\|y\|^2} = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle y, x\rangle^2},$$

d.h. die Wurzel des Restterms aus dem Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
In beiden Visualisierungen beachte man: Wird u kleiner, so wird der Restterm kleiner. Für $u = 0$, also x, y linear abhängig, verschwinden die rote und die gelbe Fläche und unsere Ungleichung wird zur Gleichung.

2.2 Wie die ∞-Norm zu ihrem Namen kommt. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{K}^n$:

$$\|f\|_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

Lösung

Sei j fest mit $|x_j| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} =: \|x\|_\infty$. Dann gilt $|x_j|^p \geq |x_i|^p$ für alle $p \geq 0, 0 \leq i \leq n$ und weiter

$$|x_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n|x_j|^p.$$

Da die Wurzelfunktionen auf $\mathbb{R}_+$ monton steigend sind, folgt weiter

$$\|x\|_\infty = (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}}|x_j| = n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty.$$

Wir betrachten jetzt den Limes $p \to \infty$ und erhalten $n^{\frac{1}{p}} \to 1$.[1] Es folgt

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.3 Integralversion der Hölder-Ungleichung. Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

[1] Z. B. wegen Stetigkeit von exp und $\lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{\log(n)}{\lim_{p\to\infty} p}\right) = e^0 = 1$. Da $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ können wir den Standardzweig des Logarithmus wählen.

Erinnern Sie sich auch an die Norm $\|\cdot\|_\infty : C([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.6.4 im Skript. Zeigen Sie für konjugierte $p, q \in [1,\infty]$ und für $f, g \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Imitieren Sie dazu den Beweis der Hölder-Ungleichung in ℓ^p.

Lösung

Dem Hinweis folgend imitieren wir den bereits bekannten Beweis. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Aussage trivial. Sei nun $f \neq 0, g \neq 0 \Rightarrow \|f\| > 0, \|g\| > 0$ für jede Norm $\|\cdot\|$. Nach Voraussetzung ist außerdem $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$.[2] Insbesondere gilt nach Aufgabe 1.5 schon

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx.$$

Sei zunächst $1 < p < \infty$. Mit Gleichung (3), 1.20, d.h. mit

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall 0 \le a, b < \infty \tag{3}$$

schließen wir für $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_p}$ den Beweis wie folgt ab

$$\begin{aligned}
\frac{\int_a^b |f(x)||g(x)|\;dx}{\|f\|_p\|g\|_q} &= \int_a^b \frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\;dx \\
&\le \int_a^b \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q}\right)\;dx \\
&= \frac{1}{p\|f\|_p^p}\underbrace{\int_a^b |f(x)|^p\;dx}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{q\|g\|_q}\underbrace{\int_a^b |g(x)|^q\;dx}_{=\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Der Fall $p = 1 \Rightarrow q = \infty$ folgt direkt aus $|g(x)| \le \max\{g(y) : y \in [a,b]\} = \|g\|_\infty$[3]

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|\;dx \le \|g\|_\infty \int_a^b |f(x)|\;dx = \|f\|_1\|g\|_\infty.$$

2.4 Gleichheit in der Hölder-Ungleichung in ℓ^p. Es seien I eine abzählbare Menge, $p, q \in]1,\infty[$ konjugiert zueinander, $f \in \ell^p(I)$, $f \neq 0$, $g \in \ell^q(I)$ und

$$h \in \mathbb{K}^I, \quad h(j) := \begin{cases} |f(j)|^{p-2}\overline{f(j)} & \text{für } f(j) \neq 0, \\ 0 & \text{für } f(j) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_{j\in I} f(j)g(j) = \|f\|_p\|g\|_q$

[2] $[a,b]$ kompakt, f, g stetig.
[3] Da $[a,b]$ kompakt, existiert das Maximum.

(b) Es gilt $g = \alpha h$ für ein $\alpha \geq 0$.

2.4 *Gleichheit in der Hölder-Ungleichung für* ℓ^p

Seien I abzählbar, $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \ell^p(I)$, $g \in \ell^q(I)$, $h \in \mathbb{K}^I$ mit $f \neq 0$, und

$$h(j) := \begin{cases} |f(j)|^{p-2}\, \overline{f(j)} & \text{, falls } f(j) \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } f(j) = 0 \end{cases}$$

Wir wollen die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen zeigen:

(a) $\sum_{j \in I} f(j) g(j) = \|f\|_p \|g\|_q$ (b) $g = \alpha h$ (für ein $\alpha \geq 0$)

(b) ⇒ (a): Gilt (b), so folgt

$$\sum_{j\in I} f(j)\, g(j) = \alpha \sum_{j \in I} f(j)\, \overline{f(j)}\, |f(j)|^{p-2} = \alpha \sum_{j\in I} |f(j)|^p = \alpha \|f\|_p^p \qquad (*)$$

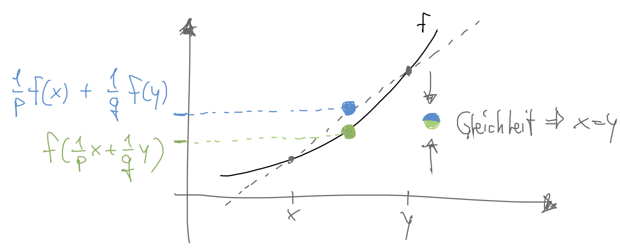
sowie $\|g\|_q = \alpha \|h\|_q = \alpha \Big(\sum_{j \in I} |f(j)|^{\overbrace{(p-1)q}^{=p}} \Big)^{\frac{1}{q}} = \alpha \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$. Wegen

$\frac{p}{q} + 1 = p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right) = p$, folgt $\|f\|_p \|g\|_q = \alpha \|f\|_p^p \overset{(*)}{=} \sum_{j\in I} f(j)\, g(j)$

(a) ⇒ (b): Im Fall $g = 0$, wähle $\alpha = 0$. Für $g \neq 0$ ergeben sich aus (a) die Bedingungen

(1) $\sum_{j\in I} f(j)\, g(j) \geq 0$ (2) Gleichheit in der Hölder-Ungleichung

(i) Aus dem Beweis der Hölder-Ungleichung (Skript S. 13) folgt: (2) ist genau dann erfüllt wenn in der Konvexitätsbedingung der Exponentialfunktion Gleichheit gilt, d.h. genau dann wenn $\log(a^p) = \log(b^q)$ mit $a = |f(j)| / \|f\|_p$ und $b = |g(j)| / \|g\|_q$ $(f, g \neq 0)$.



Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

Da $\log$ auf $(0,\infty)$ injektiv ist, folgt $a^p = b^q$, also $\exists\, \alpha > 0$ (nämlich $\frac{\|g\|_q}{\|f\|_p}$) sodass $\forall j \in I$ $\left(\frac{p}{q} = p-1\right)$

$$|g(j)| = \alpha\, |f(j)|^{p-1}$$

Somit $\exists\, \gamma \in \mathbb{K}^I$ mit $|\gamma(j)| = 1$ und $g(j) = \alpha\, |f(j)|^{p-1}\gamma(j)$, $\forall j \in I$.

(ii) Wegen $\sum_{j\in I} |f(j)\, g(j)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left|\sum_j f(j)\, g(j)\right| \overset{(1),(a)}{=} \|f\|_p \|g\|_q \overset{\text{Hölder}}{\geq} \sum_{j\in I} |f(j)\, g(j)|$, also

$\sum_{j\in I} |f(j)\, g(j)| = \sum_{j\in I} f(j)\, g(j)$, folgt $\underline{\underline{f(j)\, g(j) \geq 0 \quad \forall j \in I}}$ (Überprüfen Sie diese Aussage, d.h. $\sum_j \alpha_j = \sum_j |\alpha_j| \Rightarrow \alpha_j \geq 0 \ \forall j$)

$$\overset{(i)\,\&\,(ii)}{\Longrightarrow} \quad f(j)\, \gamma(j)\, |f(j)|^{p-1} \geq 0 \quad \forall j \in I \quad \Longrightarrow \quad \forall j \in I \text{ mit } f(j) \neq 0: \ f(j)\, \gamma(j) \geq 0$$

$$\overset{\eta := \frac{f}{|f|}}{\Longrightarrow} \quad \eta(j)\, \gamma(j) \geq 0 \quad \forall j \in I \text{ mit } f(j) \neq 0$$

$$\overset{|\eta|, |\gamma| = 1}{\Longrightarrow} \quad \eta(j) = \overline{\gamma(j)} \quad \forall j \in I \text{ mit } f(j) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma(j)\, |f(j)| = \overline{f(j)} \quad \forall j \in I \text{ mit } f(j) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad g(j) = \alpha\, |f(j)|^{p-2}\, \overline{f(j)} \quad \forall j \in I \text{ mit } f(j) \neq 0$$

Da $\forall j \in I$ mit $f(j) = 0$, $g(j) \overset{(i)}{=} 0$ folgt, erhalten wir insgesamt $g = \alpha h$.

2.5 Dualität zwischen p- und q-Norm für stetige Funktionen. Mit den Notationen der Übung 3 seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugiert zueinander und $f \in C([a,b], \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| \,\middle|\, g \in C([a,b], \mathbb{K}), \|g\|_q \leq 1 \right\}. \tag{2}$$

Lassen Sie sich dazu vom Beweis des Korollars 1.22 im Skript inspirieren.

2.5 *Dualität zwischen p- und q-Norm für stetige Funktionen*

<u>z.z.</u>: $\forall\, p,q \in [1,\infty]$, $f \in C([a,b],\mathbb{K})$: $\sup\left\{ \left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| : g \in C([a,b],\mathbb{K}),\ \|g\|_q \le 1 \right\} = \|f\|_p$ $\quad (*)$

Bemerkung zum Dualitätsbegriff / Ausblick: Der Dualraum U^* eines normierten Raumes $(U, \|\cdot\|)$ ist der lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen $\varphi: U \to \mathbb{K}$ (sog. lineare Funktionale). Ausgestattet mit $\|\varphi\|_{U^*} := \sup\{ |\varphi(v)| : v \in U, \|v\| \le 1\}$ bildet U^* einen normierten Raum. In Analysis 3 und später in Funktionalanalysis betrachtet man die sog. L^p-Räume, die eine Verallgemeinerung der ℓ^p-Räume darstellen; <u>moralisch</u> bestehen diese Räume aus Funktionen $f \in \mathbb{K}^I$, wobei I nun <u>überabzählbar</u> viele Elemente enthalten kann (z.B. $I = [a,b]$), mit $\|f\|_p < \infty$, wobei in der Definition von $\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ das Riemann-Integral durch einen neuen Integral-Begriff ersetzt wird (das sog. Lebesgue-Integral). Streng genommen sind die Elemente von $L^p(I)$ im allgemeinen gar keine Funktionen, sondern <u>Äquivalenz-Klassen von Funktionen</u> (analog zu Lemma 1.9). Diese Schwierigkeit ist notwendig um $(L^p, \|\cdot\|_p)$ zu normierten Räumen zu machen. Es stellt sich heraus, dass $\forall\, p,q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\left(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p \right) \cong \left(L^q([a,b]), \|\cdot\|_q \right)^*$$

„$U \cong W$" bedeutet: Es gibt eine <u>strukturerhaltende</u> Bijektion $\Phi: U \to W$ („Isomorphismus")

- Im Fall von Vektorräumen, ist Φ linear
- Im Fall von normierten Räumen, ist Φ zusätzlich normerhaltend: $\|\Phi(v)\|_W = \|v\|_U$

Dabei ist der Isomorphismus $\Phi: L^p([a,b]) \to L^q([a,b])^*$ gegeben durch

$$\Phi(f): L^q([a,b]) \to \mathbb{K}, \quad g \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Da Φ normerhaltend ist, gilt somit

$$\|f\|_p = \|\Phi(f)\|_{(L^q)^*} = \sup\left\{ \left| [\Phi(f)](g) \right| : g \in L^q([a,b]),\ \|g\|_q \le 1 \right\} \quad (\text{vgl. mit } (*))$$

Der einzige Unterschied zu $(*)$ besteht in der Beschränkung auf $C([a,b]) \subset L^q([a,b])$ bei der Supremumsbildung. Dies ist erlaubt, da $C([a,b])$ genügend „dicht" (wird später def.) in $L^q([a,b])$ liegt.

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

Beweis von (*): Da (*) für $f=0$ trivial erfüllt ist, können wir $f \neq 0$ annehmen. Für $g \in C([a,b],\mathbb{K})$ mit $\|g\|_q \leq 1$ gilt $\forall f \in C([a,b],\mathbb{K})$

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \overset{\text{Übung 1.5}}{\leq} \int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q \leq \|f\|_p$$

Also auch $\sup \left\{ \left| \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| : \|g\|_q \leq 1 \right\} \leq \|f\|_p$.

Beweis von "$\geq$" im Fall $1 < p,q < \infty$: Analog zur Übung 2.4, sei die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \in [a,b] \text{ mit } f(x) = 0 \\ |f(x)|^{p-2}\, \overline{f(x)} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist $h \in C([a,b],\mathbb{K})$, denn $|h| = |f|^{p-1}$ $(p>1)$ und $h(x_0) = 0$ für alle Nullstellen x_0 von f.

Genauer: Sei $x_0 \in [a,b]$ eine beliebige Nullstelle von f, also auch $h(x_0) = 0$, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f und $|\cdot|^{p-1}$ stetig sind, ist auch $|f|^{p-1}$ stetig und somit gibt es ein $\delta > 0$ s.d. $|f(x)|^{p-1} < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Fall 1: $f(x) = 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. In diesem Fall ist $|h(x)| = h(x) = 0 < \varepsilon$ $\forall x, |x-x_0| < \delta$

Fall 2: $\exists \tilde{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $f(\tilde{x}) \neq 0$. Dann ist $|h(\tilde{x})| = |f(\tilde{x})|^{p-1} < \varepsilon$, da $|\tilde{x} - x_0| < \delta$

Außerdem gilt $|h|^q = |f|^{(p-1)q} = |f|^p$ und somit $\|h\|_q = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/q} = \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$.
Setzen wir $\tilde{g} := \frac{h}{\|h\|_q}$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\, \tilde{g}(x)\, dx = \frac{1}{\|h\|_q} \int_a^b |f(x)|^p\, dx = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p^{p - \frac{p}{q}} = \|f\|_p$$

Somit wird das Supremum in (*) im Fall $1 < p,q < \infty$ in $\tilde{g}$ angenommen und stimmt mit $\|f\|_p$ überein.

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

Beweis von "$\geq$" für $p=1$, $q=\infty$:

Am liebsten würden wir $x \mapsto \overline{f(x)}/|f(x)|$ als Testfunktion für g in $\int_a^b f(x) g(x)\, dx$ einsetzen um $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx = \|f\|_1$ zu erhalten, doch da das Supremum über stetige Funktionen genommen wird, ist dies nicht erlaubt. Wir benutzen folgende Regularisierung:

Für $\varepsilon > 0$, def. $g_\varepsilon(x) := \dfrac{\overline{f(x)}}{|f(x)| + \varepsilon}$. Dann gilt $g_\varepsilon \in C([a,b], \mathbb{K})$, sowie $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq 1$.
Außerdem gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

Notation: $|f| := |f(x)|$

$$\left| f(x) g_\varepsilon(x) - |f(x)| \right| = \left| \frac{|f|^2}{|f| + \varepsilon} - |f| \right| = \left| \frac{|f|^2 - |f|^2 - \varepsilon |f|}{|f| + \varepsilon} \right| = \varepsilon \frac{|f|}{|f| + \varepsilon} \leq \varepsilon$$

Folglich konvergiert $f g_\varepsilon$ gleichmäßig gegen $|f|$, weshalb (Satz 5.32 (Analysis I) über Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x) g_\varepsilon(x)\, dx = \int_a^b \lim_{\varepsilon \to 0} f(x) g_\varepsilon(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Es gibt also eine Folge $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ in der Menge $M := \{ g \in C([a,b], \mathbb{K}) \mid \|g\|_\infty \leq 1 \}$, sodass $\int_a^b f g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \|f\|_1$, also $\sup_{g \in M} \left| \int_a^b f g \right| \geq \|f\|_1$.

Beweis von "$\geq$" für $p=\infty$, $q=1$

Wegen $|f| \in C([a,b], \mathbb{K})$ und da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$|f(x_0)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

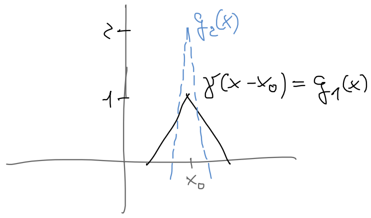
Es genügt somit, eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([a,b], \mathbb{K})$ zu finden, sodass $\|g_n\|_1 = 1$

$$\int_a^b f(x) g_n(x)\, dx \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0)$$ (so ein g_n nennt man „Approximation der Identität")

⟶

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

Wir erreichen dies zum Beispiel mit $g_n(x) := n\,\gamma(n(x-x_0))$



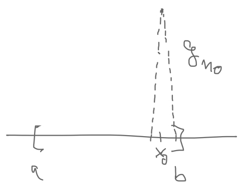
wobei
$$\gamma(x) := \begin{cases} 1-|x| & , |x| \le 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

mit $$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1-|x|\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1 .$$

also auch $$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = n\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(nx)\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(y)\,dy = 1$$

Da wir uns hier auf $[a,b]$ beschränken, müssen wir dafür sorgen, dass $\int_a^b g_n(x)\,dx = 1$ gilt, selbst wenn x_0 nahe bei a oder b liegt. Wir unterscheiden deshalb folg. Fälle:

<u>Fall 1</u>: $x_0 \neq a$ und $x_0 \neq b$



Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $g_{n_0}(a) = g_{n_0}(b) = 0$,
und damit auch $g_{n_0}(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}\setminus(a,b)$, d.h.
„das gesamte Dreieck befindet sich innerhalb von $[a,b]$". Wir können g_n also auf $[a,b]$ beschränken, d.h. wir def. $\forall n \geq n_0 \;\; h_n := g_n|_{[a,b]}$. Dann gilt

$$\|h_n\|_1 = \int_a^b h_n(x)\,dx = \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = 1 \qquad (\forall n \geq n_0)$$

sowie

$$\int_a^b f(x)\,h_n(x)\,dx = n\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f(x)\,(1-n|x-x_0|) = f(\xi_n)\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} g_n(x)\,dx = f(\xi_n) \qquad (\forall n \geq n_0)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (allg. Version), Satz 5.10 Analysis I

für ein $\xi_n \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}]$.

Aus der Stetigkeit von f und $|\cdot|$ folgt wegen $\xi_n \longrightarrow x_0$, $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_a^b f(x)\,h_n(x)\,dx\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,h_n(x)\,dx\right| = |f(x_0)|$$

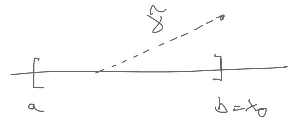
Also approximiert die Folge $(h_n)_{n\geq n_0} \subset M := \{g \in C([a,b],\mathbb{K}) : \|g\|_1 \leq 1\}$ durch $\left|\int_a^b h_n(x)f(x)\,dx\right|$ den Wert $\|f\|_\infty$, d.h. $\sup_{g\in M}\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \geq \|f\|_\infty$.

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

Fall 2: $x_0 = a$ oder $x_0 = b$

Wir wandeln γ und damit g_n ein wenig ab: Def. $\tilde{\gamma}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\gamma}(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(x-a) & \text{, falls } x_0 = a \text{ , } |x-a| \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(b-x) & \text{, falls } x_0 = b \text{ , } |x-b| \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$



Analog zu oben, $\tilde{g}_n(x) := n\,\tilde{\gamma}(nx)$ und wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\tilde{g}_{n_1}(b) = 0 \text{ , falls } x_0 = a \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}_{n_1}(a) = 0 \text{ falls } x_0 = b .$$

(Achtung: $\tilde{g}_n \notin C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Wir beschränken wieder auf $[a,b]$: $\forall n \geq n_1$ seien $\tilde{h}_n := \tilde{g}_n|_{[a,b]}$. Dann gilt $\forall n \geq n_1$ $\tilde{h}_n \in C([a,b], \mathbb{K})$ sowie $\|\tilde{h}\|_1 = \int_a^b \tilde{h}_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(x)\,dx = 1$. Außerdem gibt es (wieder nach dem MWS der Integralrechnung) eine Folge (ξ_n) bzw. (ζ_n) mit $\xi_n \in [a, a+\frac{2}{n}]$ und $\zeta_n \in [b-\frac{2}{n}, b]$ sodass

$$\int_a^b f(x)\,\tilde{h}_n(x)\,dx = \begin{cases} n\int_a^{a+\frac{2}{n}} f(x)\,(1-\frac{1}{2}(x-a))\,dx = f(\xi_n)\int_a^{a+\frac{2}{n}} \tilde{h}_n(x)\,dx = f(\xi_n) \\ n\int_{b-\frac{2}{n}}^{b} f(x)\,(1-\frac{1}{2}(b-x))\,dx = f(\zeta_n)\int_{b-\frac{2}{n}}^{b} \tilde{h}_n(x)\,dx = f(\zeta_n) \end{cases}$$

Und damit wegen der Stetigkeit von f: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\int_a^b f(x)\,\tilde{h}_n(x)\,dx\right| = |f(x_0)| = \|f\|_\infty$

Also approximiert die Folge $(\tilde{h}_n)_{n \geq n_1} \subset M := \{g \in C([a,b],\mathbb{K}) : \|g\|_1 \leq 1\}$ durch $\left|\int_a^b \tilde{h}_n(x) f(x)\,dx\right|$ den Wert $\|f\|_\infty$, d.h. $\sup\limits_{g\in M} \left|\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right| \geq \|f\|_\infty$.

$\blacksquare$

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

2.6 Studieren Sie den Beweis von Lemma 1.9 (Seite 7 im Skript).

Lösung: klar!