Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 2
26.4.2013

Übungen zur Analysis 2

2.1 Veranschaulichung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Gegeben seien die Vektoren $x = (1, 7)$ und $y = (8, 6)$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $u = x - \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} y$, wobei das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ und die zugehörigen Norm $\|\cdot\|$ gemeint sind. Veranschaulichen Sie sich x, y, $\frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2} y$ und u mit einer Graphik. Veranschaulichen Sie mit der Graphik auch den Restterm $\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$ der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

2.2 Wie die ∞-Norm zu ihrem Namen kommt. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{K}^n$:

$$\|f\|_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

2.3 Integralversion der Hölder-Ungleichung. Für $1 \le p < \infty$ und $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Erinnern Sie sich auch an die Norm $\|\cdot\|_\infty : C([a, b], \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 1.6.4 im Skript. Zeigen Sie für konjugierte $p, q \in [1, \infty]$ und für $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

Imitieren Sie dazu den Beweis der Hölder-Ungleichung in ℓ^p.

2.4 Gleichheit in der Hölder-Ungleichung in ℓ^p. Es seien I eine abzählbare Menge, $p, q \in]1, \infty[$ konjugiert zueinander, $f \in \ell^p(I)$, $f \ne 0$, $g \in \ell^q(I)$ und

$$h \in \mathbb{K}^I, \quad h(j) := \begin{cases} |f(j)|^{p-2}\overline{f(j)} & \text{für } f(j) \ne 0, \\ 0 & \text{für } f(j) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_{j\in I} f(j)g(j) = \|f\|_p\|g\|_q$

(b) Es gilt $g = \alpha h$ für ein $\alpha \ge 0$.

2.5 Dualität zwischen p- und q-Norm für stetige Funktionen. Mit den Notationen der Übung 3 seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugiert zueinander und $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| \,\middle|\, g \in C([a, b], \mathbb{K}), \|g\|_q \le 1 \right\}. \tag{2}$$

Lassen Sie sich dazu vom Beweis des Korollars 1.22 im Skript inspirieren.

2.6 Studieren Sie den Beweis von Lemma 1.9 (Seite 7 im Skript).

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 06.05.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.