

Übungen zur Analysis 2

1.1 Umfang einer Ellipse. Gegeben sei eine Ellipse mit großer Halbachse $a > 0$ und kleiner Halbachse $b \in]0, a]$.

(a) Zeigen Sie, dass der Umfang der Ellipse durch

$$U(a, \epsilon) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt$$

gegeben wird, wobei

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1[$$

die Exzentrizität der Ellipse bezeichnet.

(b) Entwickeln Sie für gegebenes $t \in [0, 2\pi]$ den Integranden $\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}$ in eine Potenzreihe in ϵ und zeigen Sie, dass diese Reihe für alle $\epsilon \in [0, 1[$ gleichmäßig in $t \in [0, 2\pi]$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie

$$U(a, \epsilon) = 2\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \binom{1/2}{n} \epsilon^{2n}.$$

Vertauschen Sie dazu Integral und Reihe und verwenden Sie die Ihnen bekannte Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

1.1. Wir berechnen die Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt \quad (*)$$

einer Kurve $t \mapsto (f(t), g(t))$:

$$t \mapsto \left(\frac{a}{2} \cos t, \frac{b}{2} \sin t \right)$$

$$(*) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{4} \sin^2 t + \frac{b^2}{4} \cos^2 t} dt$$

$$= \int \sqrt{b^2 a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt$$

$$= a \int \sqrt{1 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 t} dt$$

b) Es gilt $\frac{d^n \sqrt{1-x}}{dx^n} = + \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-3}{2} \right) (1-x)^{\frac{-2n-1}{2}}$

also $\sqrt{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2} \right) \frac{x^j}{j!}$

für $|x| < 1$. Also

$$\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} = + \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2} \frac{\cos^{2j} t}{j!} \cdot \varepsilon^{2j}$$

Dies ist für festes t eine Potenzreihe in ε . Jetzt setzen wir ε fest und betrachten t als Variable.

Weil

$$\left| \prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2k} \cdot \cos^{2j} t \cdot \varepsilon^{2j} \right| \leq \varepsilon^{2j}$$

(gilt $j! \uparrow$)

und $0 \leq \varepsilon < 1$, folgt die glw. Konvergenz

($\sum \varepsilon^j < \infty$ ist von t unabh. Majorante.)

c)

$$u(a, \varepsilon) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \, dt$$

$$= a \int_0^{2\pi} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2k} \right) \frac{\cos^{2j} t}{j!} \varepsilon^{2j} \, dt$$

glw. Konv.

$$= + a \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2k} \right) \varepsilon^{2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2j} t \, dt$$

$$= + a \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-3}{2k} \right)}_{=(-1)^j \binom{1/2}{j}} \varepsilon^{2j} \frac{2\pi}{4^j} \binom{2j}{j}$$

1.2 Besselfunktionen J_n . Für $n \in \mathbb{Z}$ wird die n -te Besselfunktion $J_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ix \cos t} dt$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass die Werte von J_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ reell sind und dass $J_{-n} = (-1)^n J_n$ gilt.
 (b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Hinweis: Entwickeln Sie dazu $e^{ix \cos t}$ bei gegebenem $t \in [0, 2\pi]$ in eine Potenzreihe in x . Zeigen Sie, dass man hier Integral und Reihe vertauschen kann und drücken Sie dann $\cos^n t = [(e^{it} + e^{-it})/2]^n$ mit Hilfe der binomischen Formel aus. Beweisen und verwenden Sie dann

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} dx = 1_{\{m=0\}} \text{ für } m \in \mathbb{Z}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass J_n , $n \in \mathbb{Z}$, die folgende “Besselsche Differentialgleichung” erfüllt:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

1.2 Besselfunktionen

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$, sei $J_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $J_n(x) := \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ix \cos t} dt$ (Def)

Zeigen wir zunächst

$$J_{-n} = (-1)^n J_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

Beweis von (*): Für festes $x \in \mathbb{R}$, setze $u_x(t) := e^{ix \cos t}$, dann gilt

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} u_x(t) dt \stackrel{(1)}{=} \int_{-2\pi}^0 e^{ins} u_x(s) ds \stackrel{(2)}{=} \int_0^{2\pi} e^{int} u_x(t) dt \quad (**)$$

wobei (1) nach der Spiegelung $t \mapsto s = -t$ aus $u_x(-t) = u_x(t)$ folgt, und

(2) nach der Verschiebung $s \mapsto t = s + 2\pi$ aus $u_x(t \pm 2\pi) = u_x(t)$. Somit gilt

$$J_{-n}(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} u_x(t) dt \stackrel{(**)}{=} \frac{(-1)^n}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} u_x(t) dt \stackrel{(\text{Def.})}{=} (-1)^n J_n(x)$$

$J_n(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$ folgt aus (*). Alternativ:

$$\begin{aligned} \overline{f_n(x)} &= \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ix \cos t} dt = f_{-n}(x) \stackrel{(*)}{=} (-1)^n f_n(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-in(t+\pi)} e^{ix \cos(t+\pi)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-int} e^{ix \cos t}}_{=: f(t) = f(t+2\pi)} dt = \frac{1}{2\pi i^n} \left(\int_0^{\pi} f(t) dt + \underbrace{\int_{-\pi}^0 f(t) dt}_{= \int_0^{2\pi} f(t) dt} \right) \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

(b) Für beliebige $t \in [0, 2\pi]$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$e^{ix \cos t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i \cos t)^j}{j!} x^j, \quad \text{wobei}$$

$$(2 \cos \varphi)^j = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^j \stackrel{\text{binom. Gesetze}}{=} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} e^{i(j-k)\varphi} e^{-ik\varphi} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} e^{i(j-2k)\varphi} \quad (\square)$$

Aus $\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{e^{imx}}{im} \Big|_0^{2\pi} = 0$ für $m \neq 0$, und $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$ folgt $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \mathbb{1}_{\{m=0\}} = \delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (\Delta)$$

Setzen wir die Potenzreihe für $e^{ix \cos t}$ in die Definition von $J_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ein, so erhalten wir $J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N,n,x}(t) dt$, mit den Partialsummen

$$S_{N, m, X}(t) := e^{i m t} \sum_{j=0}^N \frac{(i \cos t)^j}{j!} X^j$$

Angenommen, die Funktionenfolge $(S_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig, dann kann Integral und Grenzwert vertauscht werden (vgl. Satz 5.32, Analysis 1), d.h.

↳ Satz 5.32 wurde nur für reellwertige Funktionen
gezeigt, gilt aber auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(Erinnerung: $\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$)

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{j!} x^j \int_0^{2\pi} e^{-int} (\cos t)^j dt$$

$$(\square) \quad \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j!} \left(\frac{x}{z}\right)^j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \int_0^{2\pi} e^{i(j-2k-\eta)t} dt$$

$$\stackrel{(\Delta)}{=} \sum_{(i, l) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^2} i^{j-m} \left(\frac{x}{2}\right)^j \frac{1}{l!(j-l)!} \mathbb{1}_{\{j-2l-m=0\} \cap \{i \geq l\}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{k!(n+k)!} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Es bleibt die gleichmäßige Konvergenz (in t) zu zeigen: $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt ($t \in [0, 2\pi]$ würde genügen)

$$\begin{aligned} |S_{N,n,x}(t) - e^{-i n t} e^{i x \cos t}| &= \left| \sum_{j=0}^N \frac{(i x \cos t)^j}{j!} - e^{i x \cos t} \right| \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(|x| |\cos t|)^j}{j!} \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad |\cos t| \leq 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert $(S_{N,n,x})_{N \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig.

Genauer: Um gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ gegen eine Funktion f zu zeigen, genügt es eine obere Schranke für $|f_N(t) - f(t)|$ zu finden, die unabhängig von $t \in I$ ist, wobei $I := D(f) \cap D(f_N)$.

(kurze Übung: Machen Sie sich diese Aussage mithilfe der Definition aus Analysis I klar.)

(c) Betrachte zunächst $n \in \mathbb{N}_0$. Setze $\alpha_{n,k}(x) := \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$, sodass

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}(x). \quad \text{Es gilt}$$

$$x \alpha'_{n,k}(x) = x \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \frac{n+2k}{2} = (n+2k) \alpha_{n,k}(x)$$

und

$$x^2 \alpha''_{n,k}(x) = (n+2k)(n+2k-1) \alpha_{n,k}(x)$$

Also

$$\begin{aligned} x^2 \alpha''_{n,k}(x) + x \alpha'_{n,k}(x) + (x^2 - n^2) \alpha_{n,k}(x) \\ = \left((n+2k)(n+2k-1) + x^2 - n^2 \right) \alpha_{n,k}(x) \\ = (n^2 + 4nk + 4k^2 + x^2 - n^2) \alpha_{n,k}(x) = (x^2 + 4nk + 4k^2) \alpha_{n,k}(x) \end{aligned}$$

Vertauschung von Ableitung und Reihe: Um die Ableitungen $J_n'(x)$, $J_n''(x)$ mithilfe der Reihendarstellung von $J_n(x)$ aus Teil (b) gliedweise ausrechnen zu können, d.h. um $J_n'(x)$ aus $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}(x)$ zu erhalten, genügt es zu erkennen, dass $\sum_k \alpha_{n,k}(x)$ die Form einer Potenzreihe hat, mit unendlichem Konvergenzradius (Satz 6.8, Analysis 1)



$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(x^2 + 4nk + 4k^2)}_{= 4k(n+k)} \alpha_{n,k}(x) \stackrel{(\nabla)}{=} 0$$

wobei

$$\begin{aligned} (\nabla) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^2 \alpha_{n,k}(x) &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2(k+1)} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ &= -4 \sum_{k=1}^{\infty} k(n+k) \alpha_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-4k)(n+k) \alpha_{n,k}(x) \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, setzen wir $m := -n \in \mathbb{N}$ und benutzen (a): $J_n = (-1)^m J_m$.
Da J_m die Besselsche DGL erfüllt, gilt wegen $m^2 = n^2$ dies auch für J_n .

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

1.3 Die Keplersche Faßregel. Gegeben seien $a > 0$ und eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie die "Keplersche Faßregel"

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{a}{3} [f(-a) + 4f(0) + f(a)] + R(a)$$

mit folgender Integraldarstellung des "Fehlerterms" $R(a)$:

$$R(a) = \int_{-a}^a \left(\frac{1}{24}(a - |x|)^4 - \frac{a}{18}(a - |x|)^3 \right) f'''(x) dx$$

Hinweis: Entwickeln Sie mit der Taylorformel sowohl $\int_0^{\pm a} f(x) dx$ als auch $f(\pm a)$ in a um $a_0 = 0$ bis zu geeigneter Ordnung. Verwenden Sie die Lagrange-Integraldarstellung der Restglieder.

(b) Zeigen Sie

$$\exists \xi \in [-a, a] : R(a) = -\frac{a^5}{90} f'''(\xi).$$

Folgern Sie

$$|R(a)| \leq \frac{a^5}{90} \|f'''\|_{\infty},$$

wobei $\|f'''\|_{\infty} := \sup_{x \in [-a, a]} |f'''(x)|$.

Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine Version des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Beachten Sie $(a-x)^4/24 - a(a-x)^3/18 \leq 0$ für alle $a > 0$ und $x \in [0, a]$.

- (c) Welche Näherungsformel für das Volumen eines Weinfasses hat Johannes Kepler (1571 – 1630) wohl gefunden, die als Eingabegrößen die Höhe h des Fasses und die Umfänge U_b, U_m, U_d des Fasses am Boden, in der Mitte und am Deckel verwendet?

1.3 Die Keplersche Faßregel

(a) Taylorentwicklung von $\int_0^a f(x) dx$ in a um $a_0=0$ bis zur 4. Ordnung

$$(1) \quad g(a) := \int_0^a f(x) dx = 0 + f(0)a + \frac{f'(0)}{2}a^2 + \frac{f''(0)}{6}a^3 + \frac{f'''(0)}{24}a^4 + (R_{0,4}g)(a)$$

$$(2) \quad h(a) := -\int_0^{-a} f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx = f(0)a - \frac{f'(0)}{2}a^2 + \frac{f''(0)}{6}a^3 - \frac{f'''(0)}{24}a^4 + (R_{0,4}h)(a)$$

Achtung! VZ: $F' = f \Rightarrow \frac{d}{da} \int_{-a}^0 f(x) dx = \frac{d}{da} (F(0) - F(-a)) = -f(-a)$
 $\hookrightarrow h^{(n)}(a) = (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(-a)$

wobei (Satz 6.4, Analysis I, Lagrange-Darstellung des Restglieds (51))

$$(R_{0,4}g)(a) \stackrel{g \in C^4([-a,a])}{=} \int_0^a \frac{g^{(5)}(x)}{4!} (a-x)^4 dx = \int_0^a \frac{f^{(4)}(x)}{24} (a-x)^4 dx$$

$$(R_{0,4}h)(a) = \int_0^a \frac{(-1)^4 f^{(4)}(-x)}{24} (a-x)^4 dx \stackrel{x \mapsto -x}{=} \int_{-a}^0 \frac{f^{(4)}(x)}{24} (a+x)^4 dx$$

Taylorentwicklung von $a \mapsto f(\pm a)$ um $a_0=0$ bis zur 3. Ordnung:

$$(3) \quad f(\pm a) = f(0) \pm f'(0)a + \frac{f''(0)}{2}a^2 \pm \frac{f'''(0)}{6}a^3 + (R_{0,3}f_{\pm})(a)$$

wobei $f_{\pm}(x) := f(\pm x)$ und

$$(R_{0,3}f_{\pm})(a) = \int_0^a \frac{f_{\pm}^{(4)}(x)}{6} (a-x)^3 dx = \int_0^a \frac{f^{(4)}(\pm x)}{6} (a-x)^3 dx$$

$$\text{insbesondere } (R_{0,3}f_{-})(a) \stackrel{x \mapsto -x}{=} \int_{-a}^0 \frac{f^{(4)}(x)}{6} (a+x)^3 dx = \int_{-a}^0 \frac{f^{(4)}(x)}{6} (a-|x|)^3 dx$$

Wir erhalten aus (1), (2) und (3)

$$g(a) + h(a) \stackrel{(1),(2)}{=} 2a f(0) + \frac{a^3}{3} f''(0) + \underbrace{(P_{0,4} g)(a) + (P_{0,4} h)(a)}_{= \int_{-a}^a \frac{f'''(x)}{24} (a-|x|)^4 dx}$$

$$f(-a) + f(a) \stackrel{(3)}{=} 2f(0) + f''(0) a^2 + \underbrace{(P_{0,3} f_+)(a) + (P_{0,3} f_-)(a)}_{= \int_{-a}^a \frac{f'''(x)}{6} (a-|x|)^3 dx}$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = g(a) + h(a)$$

$$= 2a f(0) + \frac{a}{3} \left(f(-a) + f(a) - 2f(0) - \int_{-a}^a \frac{f'''(x)}{6} (a-|x|)^3 dx \right) + \int_{-a}^a \frac{f'''(x)}{24} (a-|x|)^4 dx$$

$$= \frac{a}{3} \left(f(-a) + 4f(0) + f(a) \right) + \underbrace{\int_{-a}^a \left(\frac{1}{24} (a-|x|)^4 - \frac{a}{18} (a-|x|)^3 \right) f'''(x) dx}_{=: P(a)}$$

b) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 5.10, Analysis 1) gilt:

$\exists \xi \in [-a, a]$ s.d.

$$P(a) = - \int_{-a}^a \underbrace{\left(-\frac{1}{24} (a-|x|)^4 + \frac{a}{18} (a-|x|)^3 \right)}_{\geq 0} f'''(x) dx$$

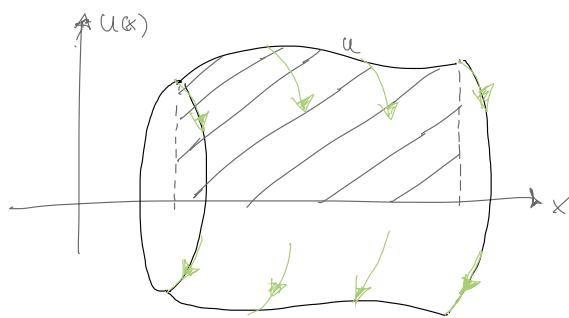
$$= -2f'''(\xi) \left(-\frac{1}{24} \int_0^a (a-x)^4 dx + \frac{a}{18} \int_0^a (a-x)^3 dx \right)$$

$$= -2f'''(\xi) \left(\frac{1}{120} (a-x)^5 \Big|_0^a - \frac{a}{72} (a-x)^4 \Big|_0^a \right)$$

$$= -2f'''(\xi) \left(-\frac{a^5}{120} + \frac{a^5}{72} \right) = -\frac{a^5}{90} f'''(\xi)$$

$$\Rightarrow |P(a)| \leq \frac{a^5}{90} \sup_{\xi \in [-a, a]} |f'''(\xi)| = \frac{a^5}{90} \|f'''\|_{\infty}$$

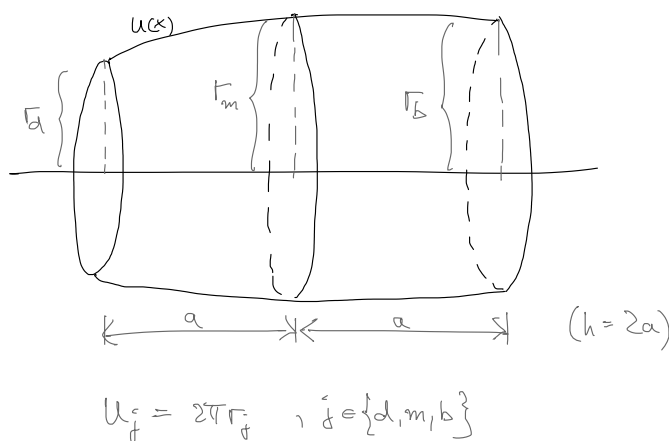
(c) Analysis 1, Skript S. 127: Volumen eines Rotationskörpers



$$V = \pi \int_a^b u(x)^2 dx$$

Für ein Faß der Form
erhalten wir also

$$V_{\text{Faß}} = \pi \int_{-a}^a u(x)^2 dx$$



mit $u(-a) = r_d$, $u(0) = r_m$, $u(a) = r_b$. Setzen wir $u(x)^2 =: f(x)$, so
folgt aus (a)

$$\int_{-a}^a u(x)^2 dx = \frac{h}{6} (r_d^2 + 4r_m^2 + r_b^2) + R\left(\frac{h}{2}\right)$$

D.h.,

$$\left| V_{\text{Faß}} - \frac{h}{24\pi} (u_d^2 + 4u_m^2 + u_b^2) \right| \leq \frac{(h/2)^5}{90} C_u$$

$$\text{mit } C_u := \left\| \frac{d^4 u^2}{dx^4} \right\|_{\infty}$$

Lösungsskizze von Sebastian Gottwald
Verbesserungsvorschläge an gottwald@math.lmu.de

1.4 1-Norm und ∞ -Norm. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ werden durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$$

und

$$\|\cdot\|_{\infty} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|(x_1, \dots, x_n)\|_{\infty} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert.

(1.4.)

$$\sum |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i: x_i = 0$$

$$\sum |\lambda x_i| = |\lambda| \sum |x_i|$$

$$\begin{aligned} \sum |x_i + y_i| &\leq \sum |x_i| + \sum |y_i| \\ &= \sum |x_i| + \sum |y_i| \end{aligned}$$

$$\max(|x_i|) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i: x_i = 0$$

$$\max(|\lambda x_i|) = |\lambda| \max(|x_i|)$$

$$\begin{aligned} \max_i (|x_i + y_i|) &\leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max_i (\max_j |x_j| + |y_i|) \\ &= \max_j (|x_j|) + \max_i (|y_i|) \end{aligned}$$

1.5 Integralversion der Dreiecksungleichung. Es seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_k(x))_{k=1, \dots, n}$. Wir kürzen ab:

$$\int_a^b f(x) dx := \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)_{k=1, \dots, n}.$$

Weiter bezeichne $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung $[a, b] \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ ist stetig, und es gilt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Approximieren Sie dazu die Integrale durch Integrale von Treppenfunktionen, also durch Summen und wenden Sie die Dreiecksungleichung an.

(1.5)

a) $x \mapsto \|f(x)\|$ ist eine Abb.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($x \mapsto f(x)$ ist

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $y \mapsto \|y\|$ ist

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.) Wir zeigen ihre

Stetigkeit in x .

Sei $x \in \mathbb{R}$. Weil jede $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

stetig ist, gilt es $\forall i \exists \delta_i \forall y$:

$$|x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Setze $\delta := \min_i \delta_i$.

Damit erreichen wir, dass jede

Komponente $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$,

also, dass wir einen Vektor

herstellen, dessen Komponenten

betragsmäßig höchstens ε sind.

Jetzt müssen wir sehen, dass

diese Norm klein wird,

Gebe dazu

$$\pi := \max \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \dots, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right)$$

Mit der Dreiecksungleichung und
Linearität der Norm folgt:

$$\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(y) \end{pmatrix} \right\|}_{= \|f(x) - f(y)\|} \leq n \cdot \pi \cdot \varepsilon$$

3.2.1. z.z., dass

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \left| \|f(x)\| - \|f(y)\| \right|$$

(Das ist nur die Dreiecksungleichung
mit Fallunterscheidung.)

Es gilt zusammen:

$$|x - \eta| < \delta \quad (\leq \delta_i \quad \forall i)$$

$$\Rightarrow \left| \|f(x)\| - \|f(\eta)\| \right| \leq \|f(x) - f(\eta)\| \leq u \cdot \pi \cdot \varepsilon$$

fertig. (Eleganterweise könnte man

mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{u \cdot \pi}$ beginnen; u und

π sind fest!

Dies war dies. Ich höre. Wer

$$\|f(x)\|.$$

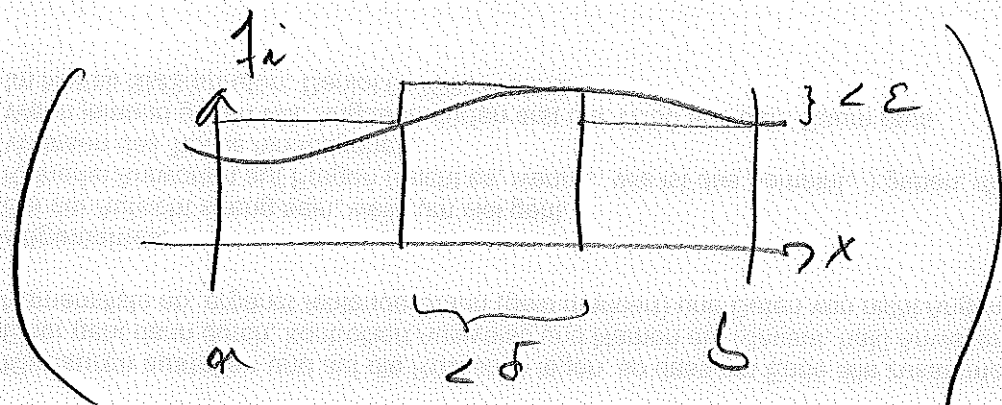
Nun zum Integral. Sei (unseres
mit gl. Wert der f_i) $\varepsilon > 0$
fest und $\delta > 0$ so, dass $\forall i$:

$$|x - \eta| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(\eta)| < \varepsilon.$$

Dann ist $\forall i$

$$(b-a)\varepsilon < \left| \int_a^b f_i(x) dx - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f_i\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)}_{(x)} \right|$$

Wobei n so zu wählen ist,
dass $\frac{b-a}{n} < \delta$.



Für die Treppenfunktion (*)
gibt die Riemannsche
Dreiecksungleichung:

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\|$$

$$\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\|$$

Lässt man nun $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen
(d.h. $n \rightarrow \infty$) folgt mit der
aufg. 1.1.1. die Behauptung.

1.6 Produktmetrik. Zeigen Sie: Sind (M_i, d_i) , $i = 1, \dots, n$, halbmetrische Räume, so wird eine Halbmetrik auf dem kartesischen Produkt $M = M_1 \times \dots \times M_n$ wie folgt definiert:

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i).$$

Sind alle d_i Metriken, so ist auch d eine Metrik. Sie wird *Produkthalbmetrik* bzw. *Produktmetrik* genannt.

Lösung

Seien im Folgenden $x = (x_i), y = (y_i), z = (z_i) \in M$ beliebig. Aus

$$d(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) \geq d_j(x_j, y_j) \geq 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n$$

folgt Positivität. Sind die d_i sogar Metriken gilt weiter

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) = 0,$$

wobei im letzten Schritt $\Rightarrow$ klar ist und $\Leftarrow$ sich ergibt, weil $0 = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) \geq d_j(x_j, y_j) \geq 0, \forall 0 \leq j \leq n$ schon $d_j(x_j, y_j) = 0, \forall 0 \leq j \leq n$ impliziert. Die analoge Rechnung mit nur $\Rightarrow$ -Implikationen zeigt Selbstabstand 0.

Symmetrie ergibt sich aus

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(y_i, x_i) = d(y, x).$$

Schließlich gilt es noch die Dreiecksungleichung zu verifizieren. Dazu bemerken wir zunächst, dass für Teilmengen $A := \{a_1, \dots, a_n\}, B := \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\max_{i=1, \dots, n} a_i + b_i \leq \max\{a : a \in A\} + \max\{b : b \in B\}$, denn für $a_k + b_k = \max_{i=1, \dots, n} a_i + b_i$ ist $a_k \in A \Rightarrow a_k \leq \max\{a : a \in A\}$ und ebenso $b_k \leq \max\{b : b \in B\}$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, z_i) \leq \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) + \max_{j=1, \dots, n} d_j(y_j, z_j) = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$