Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Sommersemester 2013
Blatt 1
17.4.2013

Übungen zur Analysis 2

1.1 Umfang einer Ellipse. Gegeben sei eine Ellipse mit großer Halbachse $a > 0$ und kleiner Halbachse $b \in]0, a]$.

(a) Zeigen Sie, dass der Umfang der Ellipse durch

$$U(a, \epsilon) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}\, dt$$

gegeben wird, wobei

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1[$$

die Exzentrizität der Ellipse bezeichnet.

(b) Entwickeln Sie für gegebenes $t \in [0, 2\pi]$ den Integranden $\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}$ in eine Potenzreihe in ϵ und zeigen Sie, dass diese Reihe für alle $\epsilon \in [0, 1[$ gleichmäßig in $t \in [0, 2\pi]$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie

$$U(a, \epsilon) = 2\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \binom{1/2}{n} \epsilon^{2n}.$$

Vertauschen Sie dazu Integral und Reihe und verwenden Sie die Ihnen bekannte Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

1.2 Besselfunktionen J_n. Für $n \in \mathbb{Z}$ wird die n-te Besselfunktion $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi i^n} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{ix\cos t}\, dt$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Werte von J_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ reell sind und dass $J_{-n} = (-1)^n J_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Hinweis: Entwickeln Sie dazu $e^{ix\cos t}$ bei gegebenem $t \in [0, 2\pi]$ in eine Potenzreihe in x. Zeigen Sie, dass man hier Integral und Reihe vertauschen kann und drücken Sie dann $\cos^n t = [(e^{it} + e^{-it})/2]^n$ mit Hilfe der binomischen Formel aus. Beweisen und verwenden Sie dann

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx}\, dx = 1_{\{m=0\}} \text{ für } m \in \mathbb{Z}.$$

(c) Zeigen Sie, dass J_n, $n \in \mathbb{Z}$, die folgende "*Besselsche Differentialgleichung*" erfüllt:

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

1.3 Die Keplersche Faßregel. Gegeben seien $a > 0$ und eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie die "Keplersche Faßregel"

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \frac{a}{3}[f(-a) + 4f(0) + f(a)] + R(a)$$

mit folgender Integraldarstellung des "Fehlerterms" $R(a)$:

$$R(a) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{24}(a - |x|)^4 - \frac{a}{18}(a - |x|)^3 \right) f''''(x)\, dx$$

Hinweis: Entwickeln Sie mit der Taylorformel sowohl $\int_0^{\pm a} f(x)\, dx$ als auch $f(\pm a)$ in a um $a_0 = 0$ bis zu geeigneter Ordnung. Verwenden Sie die Lagrange-Integraldarstellung der Restglieder.

(b) Zeigen Sie

$$\exists \xi \in [-a, a] : \; R(a) = -\frac{a^5}{90} f''''(\xi).$$

Folgern Sie

$$|R(a)| \leq \frac{a^5}{90} \|f''''\|_\infty,$$

wobei $\|f''''\|_\infty := \sup_{x \in [-a,a]} |f''''(x)|$.
Hinweis: Verwenden Sie die allgemeine Version des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Beachten Sie $(a - x)^4/24 - a(a - x)^3/18 \leq 0$ für alle $a > 0$ und $x \in [0, a]$.

(c) Welche Näherungsformel für das Volumen eines Weinfasses hat Johannes Kepler (1571 – 1630) wohl gefunden, die als Eingabegrößen die Höhe h des Fasses und die Umfänge U_b, U_m, U_d des Fasses am Boden, in der Mitte und am Deckel verwendet?

1.4 1-Norm und ∞-Norm. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ werden durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \; \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \; \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert.

1.5 Integralversion der Dreiecksungleichung. Es seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen und $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$, $f(x) = (f_k(x))_{k=1,\ldots,n}$. Wir kürzen ab:

$$\int_a^b f(x)\, dx := \left(\int_a^b f_k(x)\, dx \right)_{k=1,\ldots,n}.$$

Weiter bezeichne $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung $[a,b] \ni x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ ist stetig, und es gilt

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,dx.$$

Approximieren Sie dazu die Integrale durch Integrale von Treppenfunktionen, also durch Summen und wenden Sie die Dreiecksungleichung an.

1.6 Produktmetrik. Zeigen Sie: Sind (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, halbmetrische Räume, so wird eine Halbmetrik auf dem kartesischen Produkt $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ wie folgt definiert:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, \quad d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \max_{i=1,\ldots,n} d_i(x_i, y_i).$$

Sind alle d_i Metriken, so ist auch d eine Metrik. Sie wird *Produkthalbmetrik* bzw. *Produktmetrik* genannt.

Abgabe: Bis spätestens Freitag, den 26.04.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.