MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 9
21.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Seien $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot p_1(x) + \lambda_2 \cdot p_2(x) + \lambda_3 \cdot p_3(x) = q(x)\\
&\iff \lambda_1 \cdot (1+x+x^2) + \lambda_2 \cdot (x - x^2 + x^3) + \lambda_3 \cdot (1 - x - x^2 - x^3) = 2 + \alpha x + x^2\\
&\iff (\lambda_2 - \lambda_3)\, x^3 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) x + (\lambda_1 + \lambda_3)\, 1 = x^2 + \alpha x + 2\\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 2\\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & \alpha\\
\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1\\
 & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0
\end{array} \right.\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ \alpha\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir haben also ein inhomogenes LGS zu lösen: Es ist

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & \alpha\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
\overset{\substack{\mathrm{III}-\mathrm{I}\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & \alpha-2\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{II}\\ \mathrm{III}+\mathrm{II}}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & \alpha-2\\ 0 & 0 & -4 & \alpha-3\\ 0 & 0 & 1 & -\alpha+2 \end{array}\right)
\overset{\mathrm{IV}+\frac{1}{4}\mathrm{III}}{\curvearrowright}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & \alpha-2\\ 0 & 0 & -4 & \alpha-3\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}\alpha+\frac{5}{4} \end{array}\right)
$$

Man sieht sofort, daß dieses LGS genau für $\alpha = \frac{5}{3}$ lösbar ist, und zwar ist dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.
$$

Damit ist genau für $\alpha = \frac{5}{3}$

$$
q(x) \in \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle
$$

mit

$$
q(x) = \frac{5}{3} p_1(x) + \frac{1}{3} p_2(x) + \frac{1}{3} p_3(x).
$$

2. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \\ -4 & -10 & -7 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$(A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & 3 & b_2 \\ 3 & 0 & 1 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{IV}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+4\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & 5 & b_3 + 4b_1 \\ 0 & 1 & -3 & b_4 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{IV}-\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+2\,\mathrm{II}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - 2b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & -1 & b_4 + b_1 - b_2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+\mathrm{III}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - 2b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 + b_3 - b_1 + b_2 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ genau dann lösbar, der Vektor v also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn $-b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ gilt. Damit ist

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad -1 + 2 + 3 + 4 = 8 \neq 0$$

keine Linearkombination von v_1, v_2, v_3, während

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad -1 + 0 + 1 + 0 = 0$$

eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellt. Zur Ermittlung der Koeffizienten betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = w$; wegen

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 0 \\ -4 & -10 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \ldots \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die einzige Lösung von $A \cdot x = w$; damit erhält man die (eindeutig bestimmte) Linearkombination

$$w = 14\, v_1 - 5\, v_2 + \; v_3.$$

3. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist. Also

$$\begin{aligned} v \in U \cap W &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = v = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 \\ &\iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_1(-w_1) + \mu_2(-w_2) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{mit} \quad v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \end{aligned}$$

Wir lösen also das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{III}-3\text{I} \\ \text{II}-2\text{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}-2\text{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\alpha \\ 0 \\ \frac{2}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, also

$$v \in U \cap W \iff v = \frac{5}{3} u_1 + 0\, u_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{15}{3} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es ist demnach

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{15}{3} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

weswegen etwa der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gewählt werden kann.

4. Wir setzen zur Abkürzung $V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$ und $W := \langle w_1, w_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$, und haben damit 2 Möglichkeiten, die Gleichheit dieser beiden UVR zu zeigen:

   1. Möglichkeit: Wir zeigen:

   i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in W,$ woraus mit 4.16c) $U \subset W$ folgt.

   und

   ii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U,$ woraus mit 4.16c) $W \subset U$ folgt.

   Insgesamt ist dann also $U = W$.
   Bei dieser Vorgehensweise müssen wir also zeigen, daß die 6 LGS, gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

   lösbar sind. Wir zeigen dies exemplarisch beim letzten LGS:

Es ist

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \} \text{ Hier steht auch „rechts“ eine } 0$$

Das LGS ist lösbar, also ist $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$. u.s.w.

Man sieht an der Zeilenstufenform der Matrix $(v_1\ v_2\ v_3)$ übrigens auch, daß $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ (es ist $v_3 = v_1 - v_2$), weswegen nur $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ zu zeigen ist, also nur 4 LGS zu betrachten sind!

2. Möglichkeit: Wir schreiben U als Lösungsmenge eines homogenen LGS (welches hier nur aus einer einzigen Gleichung besteht), ebenso W, und zeigen dann, daß diese beiden LGS dieselbe Lösungsmenge besitzen (was hier darauf hinausläuft, die beiden Gleichungen miteinander zu vergleichen).

Es ist

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \iff \text{das durch } \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right) \text{ gegebene LGS ist lösbar.}$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{III}-2\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & -3 & 3 & b_3 - 2b_2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_1 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + 7b_2 \end{array}\right)$$

ist also $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in U$, genau dann, wenn $b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0$, also

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0 \right\}.$$

Ganz entsprechend ist

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \iff \text{das durch } \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 5 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ -2 & 1 & b_3 \end{array}\right) \text{ gegebene LGS ist lösbar.}$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & 5 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ -2 & 1 & b_3 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\,\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rr|c} 4 & 5 & b_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & b_2 - \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & \frac{7}{2} & b_3 + \frac{1}{2}b_1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+7\,\mathrm{II}}{\curvearrowright} \left(\begin{array}{rr|c} 4 & 5 & b_1 \\ 0 & \frac{1}{2} & b_2 - \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + 7b_2 - 3b_1 \end{array}\right)$$

ist also $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in W$, genau dann, wenn $b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0$, also

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 - 3b_1 + 7b_2 = 0 \right\}.$$

Folglich ist $U = W$. (Die beiden UVR werden durch dieselbe Gleichung beschrieben)