

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Für die gegebenen Teilmengen U_i im Vektorraum $V = \text{Pol}(\mathbb{R})$ der reellen Polynome gilt:

- $U_1 \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum!

Wir verwenden das Untervektorraumkriterium 4.8: Die Teilmenge U_1 ist nicht leer, denn sie enthält das Nullpolynom P_0 mit $P_0(x) = 0$, denn mit $a = b = c = 0$ ist

$$P_0(x) = 0x^2 + 0x + 0 \in U_1. \quad \checkmark$$

Ferner gilt für alle P und $Q \in U_1$ mit

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= (ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') \\ &= \underbrace{(a+a')}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(b+b')}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{(c+c')}_{\in \mathbb{R}}, \end{aligned}$$

also $P+Q \in U_1$. $\checkmark$ Zum anderen ist

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot P)(x) &= \lambda \cdot P(x) \\ &= \lambda \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= \underbrace{(\lambda \cdot a)}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(\lambda \cdot b)}_{\in \mathbb{R}}x + \underbrace{(\lambda \cdot c)}_{\in \mathbb{R}}, \end{aligned}$$

also $\lambda \cdot P \in U_1$. $\checkmark$ Damit ist U_1 ein Untervektorraum von V .

Sehr viel schneller geht es, wenn man bemerkt, daß

$$U_1 = \mathbb{R} \cdot x^2 + \mathbb{R} \cdot x + \mathbb{R} \cdot 1 = \langle x^2, x, 1 \rangle = \text{Pol}_2(\mathbb{R}),$$

und damit U_1 ein UVR von $\text{Pol}(\mathbb{R})$ ist.

- $U_2 \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum!

U_2 besteht nämlich aus allen Linearkombinationen von x^2 und x , es ist

$$U_2 = \mathbb{R} \cdot x^2 + \mathbb{R} \cdot x = \langle x^2, x \rangle \subset \text{Pol}(\mathbb{R}),$$

und ist damit ein Untervektorraum von $\text{Pol}(\mathbb{R})$.

- $U_3 \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ ist **kein** Untervektorraum!

Es ist nämlich $P_1, P_2 \in U_2$ für

$$P_1(x) = -x^2 + x \quad \text{und} \quad P_2(x) = x^2 + 1,$$

aber $P_1 + P_2 \notin U_3$, da

$$(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x) = (-x^2 + x) + (x^2 + 1) = x + 1$$

ein Polynom vom Grad 1, und damit kein Element von U_3 ist. Nach dem Untervektorraumkriterium 4.8 ist also U_3 kein Untervektorraum von $\text{Pol}(\mathbb{R})$.

- $U_4 \subset \text{Pol}(\mathbb{R})$ ist **kein** Untervektorraum!

Wegen $c \neq 0$ ist das Nullpolynom P_0 mit $P_0(x) = 0$ kein Element von U_4 , also ist nach 4.9 U_4 kein Untervektorraum von $\text{Pol}(\mathbb{R})$.

2. a) Die Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

und damit nach 4.13 b) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Auch die Menge $W \subset \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsmenge eines homogenen LGS, und zwar von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

und damit ebenfalls nach 4.13 b) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

- b) Die Menge $U \cap W \subset \mathbb{R}^3$ ist die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir lösen dieses LGS. Es ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Pi - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Also ist

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also tut z.B. $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

- c) Dies läßt sich am Einfachsten durch Ausprobieren lösen: Wir müssen jeden der Einheitsvektoren darstellen als Summe eines Vektors aus U und eines Vektors aus W . Dies ist beispielsweise auf die folgende Art und Weise möglich:

$$\begin{aligned} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W}, \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W}, \\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W}, \end{aligned}$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Möchte man nicht raten, sondern rechnen, so kann man beispielsweise – hier im Fall des Einheitsvektors e_1 dargestellt – das folgende lineare Gleichungssystem mit sechs Unbekannten $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ lösen:

$$\begin{aligned}u_1 + w_1 &= 1 \\u_2 + w_2 &= 0 \\u_3 + w_3 &= 0 \\u_3 &= u_1 - u_2 \\w_1 &= w_3\end{aligned}$$

3. Da $U \subset \mathbb{R}^5$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

ist, ist U nach 4.13 b) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$.

Zum Auffinden von $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^5$ mit $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ müssen wir dieses homogene LGS lösen. Wir formen dazu die Matrix A auf Zeilenstufenform um:

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \text{IV} - 4\text{I} \\ \text{III} - 5\text{I} \\ \text{II} + 2\text{I} \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir können also $x_5 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ frei wählen, und erhalten dann der Reihe nach durch Auflösen von unten her

$$\begin{aligned}x_5 &= \lambda, \\x_4 &= \mu, \\x_3 &= \frac{1}{2} \cdot (-3x_4 - 2x_5) = -\frac{3}{2}\mu - \lambda, \\x_2 &= 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = \lambda - \mu, \\x_1 &= -x_2 - x_3 - x_5 = \frac{5}{2}\mu - \lambda,\end{aligned}$$

also die allgemeine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\mu - \lambda \\ \lambda - \mu \\ -\frac{3}{2}\mu - \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und damit die Lösungsmenge L_0 von $A \cdot x = 0$

$$U = L_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(Im letzten Umformungsschritt haben wir den zweiten Erzeuger durch sein Doppeltes ersetzt, um die unschönen Brüche loszuwerden. Je nachdem, welche Umformungsschritte auf dem Weg zur Zeilenstufenform gewählt wurden, kann man auch andere Erzeuger erhalten.)

4. Ein Vektor $b \in \mathbb{R}^5$ liegt genau dann in W , wenn das LGS $B \cdot x = b$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 4}$$

lösbar ist. Zur Feststellung der Lösbarkeit formen wir mittels EZUs die Matrix B auf ZSF um. Es ist

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & b_4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & b_5 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} - 2\text{I}]{\substack{\text{V} - 3\text{I} \\ \text{IV} - 4\text{I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & -6 & 2 & -8 & b_4 - 4b_1 \\ 0 & -5 & 1 & -6 & b_5 - 3b_1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -6 & 2 & -8 & b_4 - 4b_1 \\ 0 & -5 & 1 & -6 & b_5 - 3b_1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{III} - 4\text{II}]{\substack{\text{V} - 5\text{II} \\ \text{IV} - 6\text{II}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & b_2 - 2b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 & b_4 - 4b_1 - 6b_3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 & b_5 - 3b_1 - 5b_3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{IV} - \frac{10}{7}\text{III}]{\substack{\text{V} - \frac{9}{7}\text{III} \\ \text{IV} - \frac{10}{7}\text{III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & b_2 - 2b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 4b_1 - 6b_3 - \frac{10}{7}b_2 + \frac{20}{7}b_1 + \frac{40}{7}b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 - 3b_1 - 5b_3 - \frac{9}{7}b_2 + \frac{18}{7}b_1 + \frac{36}{7}b_3 \end{array} \right) \\ & = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & b_3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & b_2 - 2b_1 - 4b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{7}b_1 - \frac{10}{7}b_2 + \frac{2}{7}b_3 + b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{7}b_1 - \frac{9}{7}b_2 + \frac{1}{7}b_3 + b_5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Zeilenstufenform ist erreicht, und nach den Lösbarkeitskriterien ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $-\frac{8}{7}b_1 - \frac{10}{7}b_2 + \frac{2}{7}b_3 + b_4 = 0$ **und** $-\frac{3}{7}b_1 - \frac{9}{7}b_2 + \frac{1}{7}b_3 + b_5 = 0$ ist. Das bedeutet insgesamt, daß

$$W = \left\{ b \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{10}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot b = 0 \right\}$$

ist. Als Rechenkontrolle kann man überprüfen, daß die vier angegebenen erzeugenden Vektoren von W alle dieses homogene LGS lösen.

(Man kann das erhaltene LGS auch noch durch Zeilenumformungen bearbeiten, um etwas übersichtlichere Zahlen zu erhalten; das liefert dann beispielsweise

$$\begin{aligned} W &= \left\{ b \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 & -7 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot b = 0 \right\} \\ &= \left\{ b \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -7 & 7 \\ 3 & 9 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot b = 0 \right\} = \dots, \end{aligned}$$

aber das ist nur Kosmetik. Wichtig ist allerdings, sich klarzumachen, daß es, wie man hier sieht, *verschiedene* Möglichkeiten der Wahl der Matrix A gibt!)