MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 7
7.12.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. zu $U \cap W = \{0\}$:

„$\supset$“: Es ist $0 \in U$ und $0 \in W$, also $0 \in U \cap W$. $\checkmark$

„$\subset$“: Sei $x \in U \cap W$. Dann ist $x \in U$ und $x \in W$.
Damit gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{aligned} 2\lambda - 1\mu &= 0 \\ 1\lambda - 3\mu &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein LGS mit den Variablen λ und μ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (*)$$

wegen $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0$ ist $(*)$ eindeutig lösbar mit

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\lambda = \mu = 0$, also $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

zu $U + W = \mathbb{R}^2$:

„$\supset$“: $U, W \subset \mathbb{R}^2$ UVR, also gilt trivialerweise, daß $U + W \subset \mathbb{R}^2$. $\checkmark$

„$\subset$“: Sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zu zeigen ist: es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$b = \underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in W}.$$

Dies ist ein LGS mit den Variablen λ und μ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \qquad (**)$$

wegen $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0$ ist $(**)$ (eindeutig) lösbar mit

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Damit gibt es also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$b = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. a) Wegen $0 \in U_1$ ist $U_1 \neq \varnothing$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 - y_2 + y_3 = 0$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0,$$

also $x + y \in U_1$. Für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\lambda\, x_1 - \lambda\, x_2 + \lambda\, x_3 = \lambda\, (x_1 - x_2 + x_3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda \cdot x \in U_1$. Folglich ist nach dem Untervektorraumkriterium U_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Alternativ kann man auch so argumentieren: U_1 ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

also nach 4.13 b) ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$ und $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, aber $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin U_2$. Damit ist U_2 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

... oder mit dieser Begründung: Es ist $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_2$, also ist wegen 4.9 U_2 kein UVR.

c) Wegen $0 \in U_3$ ist $U_3 \neq \varnothing$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 + x_2 = 2\, x_3$ und $y_1 + y_2 = 2\, y_3$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 2x_3 + 2\, y_3 = 2(x_3 + y_3),$$

also $x + y \in U_3$. Für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\lambda\, x_1 + \lambda\, x_2 = \lambda\, (x_1 + x_2) = \lambda\, (2\, x_3) = 2\, (\lambda\, x_3),$$

also $\lambda \cdot x \in U_3$. Folglich ist nach dem Untervektorraumkriterium U_3 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Alternativ kann man auch so argumentieren: U_1 ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

also nach 4.13 b) ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

d) Es ist $x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in U_4$ und $y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in U_4$, aber $x + y = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin U_4$. Damit ist U_4 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

3. Sei $n \geq 2$. Wir betrachten wir die beiden Diagonalmatrizen

$$A_1 = (e_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; ... \; 0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \text{und} \qquad A_2 = (0 \;\; e_2 \;\; ... \;\; e_n) \in \mathbb{R}^{n \times n};$$

dabei ist $e_i \in \mathbb{R}^n$ der $i-$te Einheitsvektor. Wegen

$$\det(A_1) = 1 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = 0 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 0$$

gilt $A_1 \in U$ und $A_2 \in U$, während für die Summe

$$A_1 + A_2 = (e_1 \;\; e_2 \;\; ... \;\; e_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} = E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Weil

$$\det(A_1 + A_2) = \det(E_n) = 1$$

ist $A_1 + A_2 \notin U$. Somit ist U kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ für $n \geq 2$.

4. a) Wir weisen anhand des Untervektorraumkriteriums nach, daß die Teilmengen

$$U = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B^\top = B \right\} \qquad \text{und} \qquad W = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B^\top = -B \right\}$$

Untervektorräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ aller reellen $n \times n$–Matrizen sind:

- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $0^\top = 0$, also $0 \in U$, also $U \neq \varnothing$.
  Seien nun $B, C \in U$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $B^\top = B$ und $C^\top = C$, woraus sich

  $$(B + C)^\top = B^\top + C^\top = B + C,$$

  also $B + C \in U$, sowie

  $$(\lambda \cdot B)^\top = \lambda \cdot B^\top = \lambda \cdot B,$$

  also $\lambda \cdot B \in U$, ergibt.
  Also ist $U \subset V$ UVR.
- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $0^\top = 0 = -0$, also $0 \in W$, , also $W \neq \varnothing$. Seien nun $B, C \in W$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$, woraus sich

  $$(B + C)^\top = B^\top + C^\top = (-B) + (-C) = -(B + C),$$

  also $B + C \in W$ sowie

  $$(\lambda \cdot B)^\top = \lambda \cdot B^\top = \lambda \cdot (-B) = -(\lambda \cdot B),$$

  also $\lambda \cdot B \in W$ ergibt.
  Also ist $W \subset V$ UVR.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige $n \times n$–Matrix; für $B = A + A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$B^\top = \left(A + A^\top\right)^\top = A^\top + \left(A^\top\right)^\top = A^\top + A = A + A^\top = B,$$

also $B = A + A^\top \in U$, und für $C = A - A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$C^\top = \left(A - A^\top\right)^\top = A^\top - \left(A^\top\right)^\top = A^\top - A = -\left(A - A^\top\right) = -C,$$

also $C = A - A^\top \in W$.

c) Wir zeigen

$$U \cap W = \{0\} \qquad \text{und} \qquad U + W = \mathbb{R}^{n\times n}:$$

- Es ist $U \cap W \supset \{0\}$.
  Zu „$\subset$“: Es sei $B \in U \cap W$. Wegen $B \in U$ ist $B^\top = B$, und wegen $B \in W$ ist $B^\top = -B$, woraus sich

  $$B = B^\top = -B, \qquad \text{also} \qquad 2 \cdot B = 0,$$

  und damit $B = 0$ ergibt.
  Damit ist insgesamt $U \cap W = \{0\}$.
- Es ist $U + W \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.
  Zu „$\supset$“: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Gemäß b) ist

  $$A + A^\top \in U \qquad \text{und} \qquad A - A^\top \in W,$$

  so daß sich

  $$A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(A + A^\top\right)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(A - A^\top\right)}_{\in W} \in U + W$$

  ergibt. Damit ist $U + W = \mathbb{R}^{n\times n}$.