

## Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Wir formen  $B$  auf Zeilenstufenform um:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{6 \cdot I \\ 6 \cdot II \\ 6 \cdot III}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{III+4I \\ II-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -13 & 13 \\ 0 & 13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'.
 \end{aligned}$$

Die Zeilenstufenform  $B'$  von  $A$  hat eine Nullzeile, also ist nach 2.22  $B$  nicht invertierbar.

2. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus und formen mit EZUs  $(A_t | E_4)$  um, so daß die Matrix  $A_t$  in ZSF dasteht. Man läßt sich dabei durch das Auftreten eines Parameters nicht irritieren, und schleppt ihn bei den EZUs einfach mit. An geeigneter Stelle führt man dann eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Aussehens des ZSF von  $A_t$  durch, und formt dann ggf. weiter zu  $(E_4 | A_t^{-1})$  um:

Es ist

$$\begin{aligned}
 (A_t | E_4) &= \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II-tI} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & t & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{II-IV} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) =: (A'_t | B'_t)
 \end{aligned}$$

Um nun weiter auf die ZSF umzuformen, möchten wir als nächstes  $\xrightarrow{III - \frac{t}{1-t^2} \cdot II}$ , durchführen. Dies dürfen wir allerdings nur machen, wenn  $1-t^2 \neq 0$ . Wir treffen also die folgende Fallunterscheidung:

**1. Fall:**  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

Dann ist  $1-t^2 \neq 0$ , und wir können wir weiter umformen...

$$\begin{aligned}
 (A'_t | B'_t) &\xrightarrow{III - \frac{t}{1-t^2} \cdot II} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 1 & \frac{t}{1-t^2} \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{IV-tIII} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 1 & \frac{t}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 0 & -t^2 & -\frac{t^3}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & -t & \frac{1-2t^2}{1-t^2} \end{array} \right) =: (A''_t | B''_t)
 \end{aligned}$$

Man sieht hier sofort, daß für  $t = 0$  die Matrix  $A_0''$  eine Nullzeile hat; also ist  $A_0$  nicht invertierbar. Für  $t \neq 0$  haben wir mit  $A_t''$  eine ZSF ohne Nullzeile ( $A_t$  ist also invertierbar), und es geht dann für  $t \neq 0$  weiter mit EZUs (nach wie vor auch  $t \neq \pm 1$ ) zur Einheitsmatrix  $E_4 \dots$

$$\begin{aligned}
 (A_t'' \mid B_t'') &= \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1-t^2 & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 1 & \frac{t}{1-t^2} \\
 0 & 0 & 0 & -t^2 & -\frac{t^3}{1-t^2} & \frac{t^2}{1-t^2} & -t & \frac{1-2t^2}{1-t^2}
 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\substack{\frac{1}{1-t^2} \cdot \text{II} \\ -\frac{1}{t^2} \cdot \text{IV}}}{\curvearrowright}}{\left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & -\frac{1}{1-t^2} \\
 0 & 0 & 1 & t & \frac{t^2}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 1 & \frac{t}{1-t^2} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1-t^2} & -\frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{t} & -\frac{1-2t^2}{t^2(1-t^2)}
 \end{array} \right)} \\
 &\stackrel{\substack{\text{I}-t \cdot \text{II} \\ \text{III}-t \cdot \text{IV}}}{\curvearrowright}}{\left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 0 & \frac{t}{1-t^2} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & -\frac{1}{1-t^2} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1-t^2} & -\frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{t} & -\frac{1-2t^2}{t^2(1-t^2)}
 \end{array} \right)} = (E_4 \mid A_t^{-1}).
 \end{aligned}$$

Wir sehen also im 1. Fall, daß  $A_t$  für  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  invertierbar ist mit

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t^2} & -\frac{t}{1-t^2} & 0 & \frac{t}{1-t^2} \\ -\frac{t}{1-t^2} & \frac{1}{1-t^2} & 0 & -\frac{1}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{t}{1-t^2} & -\frac{1}{1-t^2} & \frac{1}{t} & -\frac{1-2t^2}{t^2(1-t^2)} \end{pmatrix};$$

hingegen ist  $A_0$  nicht invertierbar.

**2. Fall:**  $t \in \{-1, 1\}$ .

Wir gehen zurück auf die Matrix  $A_t'$  direkt vor der Fallunterscheidung. Dann ist  $1 - t^2 = 0$  und sowohl die Matrix

$$A_{-1}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{als auch die Matrix} \quad A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

haben eine Nullzeile, sind also nicht invertierbar. Damit sind (gemäß 2.24a)) auch  $A_{-1}$  und  $A_1$  nicht invertierbar.

Zusammenfassend haben wir also

$$A_t \in GL_4(\mathbb{R}) \iff t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

3. Wir bringen  $A$  zuerst mit EZUs auf Zeilenstufenform und stellen dann mittels ESUs die Äquivalenznormalform her; dabei notieren wir ESU mit dem Pfeil  $\leftrightarrow$  und schreiben die durchgeführte Spaltenumformung dann **unter** den Pfeil. Jede jede elementare **Zeilen**umformung entspricht der Multiplikation mit einer Elementarmatrix  $F_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  von links, und jede elementare **Spalten**umformung der Multiplikation mit einer Elementarmatrix  $G_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  von rechts. Wir notieren dies gleich über bzw. unter der jeweiligen durchgeführten Umformung:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \cdot]{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \cdot]{III + I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \cdot]{IV - I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[F_4 \cdot]{III - \frac{1}{2} II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ZSF hergestellt! jetzt mit ESUs weiter zur \u00c4quivalenznormalform} \\
&\xrightarrow[\cdot G_1]{III - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot G_2]{III + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot G_3]{\frac{1}{2} \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A} \quad \text{\u00c4quivalenznormalform erreicht!}
\end{aligned}$$

Aus der ZSF sehen wir insbesondere schon, wie die \u00c4quivalenznormalform ausschauen mu\u00df, n\u00e4mlich so:

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

also mit genau 2 Einsen, d.h. der Einheitsmatrix  $E_2$  im linken oberen Eck. Damit ist

$$\bar{A} = F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = F \cdot A \cdot G$$

f\u00fcr

$$\begin{aligned}
F &= F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Beachten Sie, da\u00df die Darstellung von  $\bar{A}$  als Produkt  $F \cdot A \cdot G$  mit invertierbaren Matrizen  $F$  und  $G$  nicht eindeutig ist! Je nachdem, mit welchen (und wievielen!) EZUs und ESUs Sie von  $A$  zu  $\bar{A}$  gelangt sind, bekommen Sie auf diesem Wege unterschiedliche Produktdarstellungen von  $\bar{A}$ .)

4. a) Seien  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

- Es ist  $A = E_m \cdot A \cdot E_n \implies A \approx A$ .
- Sei  $A \approx B$ . Dann ist  $B = F \cdot A \cdot G$  mit  $F \in GL_m(\mathbb{R}), G \in GL_n(\mathbb{R})$   
 $\implies A = F^{-1} \cdot B \cdot G^{-1}$  und  $F^{-1} \in GL_m(\mathbb{R}), G^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}) \implies B \approx A$ .
- Seien  $A \approx B, B \approx C$ . Dann ist  $B = F_1 \cdot A \cdot G_1$  mit  $F_1 \in GL_m(\mathbb{R}), G_1 \in GL_n(\mathbb{R})$   
und  $C = F_2 \cdot B \cdot G_2$  mit  $F_2 \in GL_m(\mathbb{R}), G_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ . Damit ist  
 $C = F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 = F \cdot A \cdot G$  f\u00fcr  $F := F_2 \cdot F_1 \in GL_m(\mathbb{R}), G := G_1 \cdot G_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ .  
Also ist  $A \approx C$ .

- b) “ $\implies$ ” Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A \approx B$ , also  $B = F_1 \cdot A \cdot G_1$  mit  $F_1 \in GL_m(\mathbb{R}), G_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ . Sei  $D$  die Äquivalenznormalform von  $B$ . Dann gibt es nach 2.29 Matrizen  $F_2 \in GL_m(\mathbb{R}), G_2 \in GL_n(\mathbb{R})$  mit

$$D = F_2 \cdot B \cdot G_2,$$

also insgesamt

$$D = F_2 \cdot F_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 = F \cdot A \cdot G \quad \text{mit} \quad F := F_2 \cdot F_1 \in GL_m(\mathbb{R}), G := G_1 \cdot G_2 \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Die Äquivalenznormalform einer Matrix ist nach 2.29 eindeutig bestimmt, also ist  $D$  auch die Äquivalenznormalform von  $A$ , also haben  $A$  und  $B$  dieselbe Äquivalenznormalform.

- “ $\impliedby$ ” Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $D$  die Äquivalenznormalform von  $A$  und  $B$ . Dann ist mit 2.29

$$D = F_1 \cdot A \cdot G_1 \quad \text{und} \quad D = F_2 \cdot B \cdot G_2$$

mit  $F_1, F_2 \in GL_m(\mathbb{R}), G_1, G_2 \in GL_n(\mathbb{R})$ . Es folgt

$$\begin{aligned} F_1 \cdot A \cdot G_1 &= F_2 \cdot B \cdot G_2 \\ \implies F_2^{-1} \cdot F_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2^{-1} &= B \\ \implies F \cdot A \cdot G &= B \quad \text{mit} \quad F := F_2^{-1} \cdot F_1 \in GL_m(\mathbb{R}), G := G_1 \cdot G_2^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Also ist  $A \approx B$ .

- c) Wir bestimmen zuerst die Äquivalenznormalform von  $A$ . Es reicht dazu, wenn wir  $A$  durch EZUs auf ZSF bringen; aus dieser können wir die Gestalt der Äquivalenznormalform ablesen. Es ist

$$A \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A'$$

Da die ZSF  $A'$  zwei Stufen hat, hat die Äquivalenznormalform  $\bar{A}$  von  $A$  genau zwei Einsen, sieht also so aus:

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wir untersuchen nun die Äquivalenznormalform  $\bar{B}_s$  von  $B_s$ ; auch hier reicht es,  $B_s$  durch EZUs auf ZSF zu bringen. Es ist

$$B_s \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ s & 1 & s \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - s\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 - s^2 & 0 \\ 0 & 1 - s^2 & 1 - s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s \end{pmatrix} =: B'_s$$

**1. Fall:**  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

Dann ist  $1 - s^2 \neq 0$  und  $1 - s \neq 0$ , also hat die ZSF

$$B'_s = \begin{pmatrix} 1 & s & 1 \\ 0 & 1 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s \end{pmatrix}$$

genau drei Stufen, also ist  $\bar{B}_s = E_3 \neq \bar{A}$ ;  $A$  und  $B_s$  haben also verschiedene Äquivalenznormalformen und können daher nach b) nicht äquivalent sein.

**2. Fall:**  $s = 1$ .

Dann hat die ZSF

$$B'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nur eine Stufe,  $A$  und  $B_1$  haben also auch hier verschiedene Äquivalenznormalformen und können daher nach b) nicht äquivalent sein.

**3. Fall:**  $s = -1$ .

Dann ist

$$B'_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also hat die ZSF von  $B_{-1}$  genau zwei Stufen und es ist dann  $\overline{B}_{-1} = \overline{A}$ ;  $A$  und  $B_{-1}$  haben also dieselbe Äquivalenznormalform und sind daher nach b) äquivalent.

Insgesamt ist also

$$A \approx B_s \iff s = -1.$$