MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, L. Ramzews

WS 2018/19
Blatt 3
9.11.2018

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ -Lösungsvorschlag-

1. Seien $b, c \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$A^2 = O \quad \Longleftrightarrow \quad b \cdot c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0 \ \vee \ c = 0.$$

Damit gilt z.B. für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig, daß $A^2 = O$. Also gibt es unendlich viele Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = E_n$.

2. a) Wir multiplizieren unter Verwendung der Rechenregeln 2.12 für die Matrizenmultiplikation aus:

$$(A - E_n) \cdot (A + 4E_n) = A^2 + 4AE_n - E_nA - 4E_n^2 = A^2 + 3AE_n - 4E_n = O,$$

schreiben diese Gleichung in der Form $E_n = ...$

$$E_n = \frac{1}{4}A^2 + \frac{3}{4}AE_n,$$

und klammern dann auf der rechten Seite A aus, einmal nach links und einmal nach rechts:

$$E_n = A \cdot \frac{1}{4}A + A \cdot \frac{3}{4}E_n = A \cdot \left(\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}E_n\right)$$

und

$$E_n = \frac{1}{4}A \cdot A + \frac{3}{4}E_n \cdot A = \left(\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}E_n\right) \cdot A.$$

Damit gilt mit $B := \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}E_n$, daß

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A,$$

Nach Definition ist damit A invertierbar (und $A^{-1} = B = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}E_n$).

[Nach 2.26 würde für die Invertierbarkeit von A auch schon $A \cdot B = E_n$ reichen!]

b) Man sieht sofort, daß für $A = E_2$ und $A = -4E_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ gilt $(A - E_n) \cdot (A + 4E_n) = O$, da dann einer der beiden Faktoren die Nullmatrix ist.
Durch Probieren finden wir, daß z.B. auch für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

gilt

$$(A - E_n) \cdot (A + 4E_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Es ist

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = ... = C \cdot A.$$

b) Sei $\det A \neq 0$. Dann gilt mit $B := \frac{1}{\det A} \cdot C$

$$A \cdot B = A \cdot (\frac{1}{\det A} \cdot C) \overset{2.12c)}{=} \frac{1}{\det A}(A \cdot C) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = E_2,$$

und genauso auch $B \cdot A = E_2$. Damit ist A invertierbar (nach 2.26 folgt dies auch schon aus $A \cdot B = E_2$) mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

c) <u>Annahme:</u> $\det A = 0$.
Dann ist $A \cdot C \overset{a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da A invertierbar ist, folgt daraus

$$C = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist nach Definition von C dann $d = -b = -c = a = 0$, also $a = b = c = 0$, und damit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß A invertierbar ist.
Also ist $\det A \neq 0$.

4. Wir formen A durch EZUs auf ZSF um, sehen an dieser gemäß 2.22, daß A invertierbar ist, also durch weitere EZUs die Einheitsmatrix E_4 hergestellt werden kann. Es ist

$$(A \mid E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \overset{\text{III} - 5\,\text{I}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{IV} - 3\,\text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{4} \cdot \text{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{8} \cdot \text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2} \cdot \text{II}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{II} - 2\,\text{IV}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{I} - 3\,\text{III}}{\curvearrowright} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

Bereits nach 2 elementaren Zeilenumformungen ist eine ZSF erreicht, aus der wir sofort erkennen (keine Nullzeile!), daß A invertierbar ist, also eine weitere Umformung zu E_4 möglich ist.
Jede elementare Zeilenumformung entspricht gemäß 2.13 der Multiplikation mit einer Elementarmatrix <u>von links</u>, mit unseren durchgeführten EZUs ist also

$$E_4 = F_7 \cdot F_6 \cdot F_5 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A,$$

wobei

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-5)-fachen der 1. Zeile zur 3. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{III}-5\,\mathrm{I}}{\curvearrowright}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-3)-fachen der 2. Zeile zur 4. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{IV}-3\,\mathrm{II}}{\curvearrowright}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation der 4. Zeile mit } -\frac{1}{4}\text{:} \quad \overset{-\frac{1}{4}\,\mathrm{III}}{\curvearrowright}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation der 3. Zeile mit } -\frac{1}{8}\text{:} \quad \overset{-\frac{1}{8}\,\mathrm{III}}{\curvearrowright}$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation der 2. Zeile mit } \frac{1}{2}\text{:} \quad \overset{\frac{1}{2}\,\mathrm{II}}{\curvearrowright}$$

$$F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-2)-fachen der 4. Zeile zur 2. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{II}-2\,\mathrm{IV}}{\curvearrowright}$$

$$F_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Addition des (-3)-fachen der 3. Zeile zur 1. Zeile:} \quad \overset{\mathrm{I}-3\,\mathrm{III}}{\curvearrowright}$$

Aus $E_4 = F_7 \cdot F_6 \cdot F_5 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot A$ folgt, daß

$$A = F_1^{-1} \cdot F_2^{-1} \cdot F_3^{-1} \cdot F_4^{-1} \cdot F_5^{-1} \cdot F_6^{-1} \cdot F_7^{-1}.$$

Das Inverse eine Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix (sogar vom selben Typ); damit haben wir (unter Beachtung von 2.21) folgende Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrixen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Beachten Sie, daß die Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrixen nicht eindeutig ist! Je nachdem, mit welchen (und wievielen!) EZUs wir von A zu E_4 gelangt sind, bekommen wir auf diesem Wege unterschiedliche Produktdarstellungen von A.)